Analisi Matematica 1, Scritto 2-B. Durata della prova: 2 ore **25.1.11**

Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola: .... **Corso di Laurea:** .... **Canale:** $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$

Domanda 1

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di estremo superiore di un insieme $D \subset \mathbb{R}$.

(ii) Fare un esempio di un insieme $D \subset \mathbb{R}$ tale che $\sup D = 5$ e $\max D$ non esiste.

Risposta

(i) $S \in \mathbb{R}$ si chiama maggiorante di D se $S \geq x \ \forall x \in D$; l'estremo superiore di D è il maggiorante più piccolo di D.

(ii) $D = (-\infty, 5)$

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Enunciare il teorema di Fubini–Tonelli per domini x-semplici.

(ii) Calcolare $|X| = \iint_X 1 \, dx \, dy$ per $X = \{(x, y) : y \in [0, 1], \ y^2 \leq x \leq 1\}$.

Risposta

(i) Sia $f: X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua e X un dominio semplice. Allora f è integrabile su X e

$$\iint_X f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy \text{ se } X \text{ è } x\text{-semplice}$$

$$X = \{(x,y) \mid y \in [c,d],\ g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}$$

(ii)

$$|X| = \int_0^1 \int_{y^2}^1 1 \, dx \, dy = \int_0^1 x \Big|_{x=y^2}^{x=1} dx$$

$$= \int_0^1 (1 - y^2)\,dy = \left[y - \frac{y^3}{3} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} - 0 = \frac{2}{3}$$

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione tale che $(a_n)^2 \sim e^{-n}$ per $n \to +\infty$. Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

[a] è irregolare [b] diverge [c] converge [d] non si può concludere nulla

Risoluzione

Per definizione $\frac{a_n^2}{e^{-n}} \to 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{a_n^2}{e^{-n}}} = \frac{|a_n|}{e^{-n/2}} \to 1$ per $n \to +\infty$

cioè $|a_n| \sim e^{-n/2} = \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n$. Inoltre $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n$ converge (poiché $q = \frac{1}{\sqrt{e}} < 1$) $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ conv. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

Esercizio 2

[3 punti]

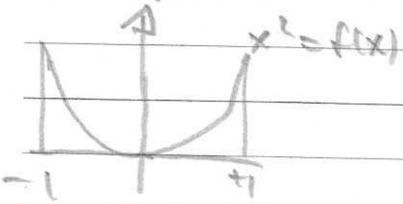
Sia $f \in C[a,b]$ e $c \in [a,b]$ tale che $f(c) = 0$. Allora

[~~a~~] $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ con $x \in [a,b]$ ha almeno un punto critico [b] f è monotona

[c] f ha almeno un punto critico [d] $f(a) \cdot f(b) \leq 0$

Risoluzione

Sol. → cfr. capitolo 2-A. <u>N.B</u>: La risposta d) è sbagliata! In particolare <u>non</u> segue dal teorema degli zeri!!



	ipotesi	tesi
E2	$f(c) = 0$	$f(a)\cdot f(b) \leq 0$
teorema degli zeri	$f(a)\cdot f(b) \leq 0$	$f(c) = 0$

Esercizio 3

[3 punti]

Il polinomio di McLaurin di ordine 3 di $f(x) = \sinh(x + x^2)$ è dato da $T_3(x) =$

[~~a~~] $x + x^2 + \frac{x^3}{6}$ [b] $x + \frac{x^3}{3}$ [c] $x + x^2$ [d] 0

Risoluzione

$\sinh(t) = t + \frac{t^3}{6} + o(t^3) \Rightarrow$

$t = x + x^2 \sim x$ per $x \to 0$

$\sinh(x+x^2) = x + x^2 + \frac{(x+x^2)^3}{6} + o((x+x^2)^3)$

$= x + x^2 + \frac{x^3 + o(x^3)}{6} + o(x^3)$

$= \underbrace{x + x^2 + \frac{x^3}{6}}_{= T_3(x)} + o(x^3)$

Esercizio 4

[4 punti]

Verificare se esiste il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y \cdot \frac{y^2 - 3x^2}{x^2 + y^2} = f(x,y)$$

Risoluzione

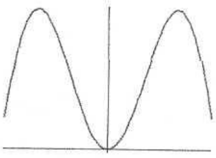
Come nel compito 2-A segue che

$f(x,y) \to 0$ per $(x,y) \to (0,0)$.

Esercizio 5

[4 punti]

La curva in figura è parte del grafico di



[a] $f(x) = x \cdot \sin(-x)$

[b] $f(x) = x \cdot \sinh(x)$

[~~c~~] $f(x) = x \cdot \sin(x)$

[d] $f(x) = x \cdot \sin^2(x)$ ← dispari

Risoluzione

La funzione nel grafico è pari $\Rightarrow$ non d).

Inoltre

- non b) in quanto $f(x) = x \cdot \sinh(x)$ è crescente per $x > 0$ ($f'(x) = \sinh(x) + x \cdot \cosh(x) \geq 0$ per $x > 0$)
- non a) in quanto $f(x) = x \cdot \sin(-x) = -x \cdot \sin(x)$ è negativa per $x \in (0, \pi)$

Quindi c)

Esercizio 6 **[5 punti]**

Calcolare l'integrale definito
$$\int_0^1 \ln(1+\sqrt{x})\,dx =: I$$

Risoluzione

Sost. $1+\sqrt{x} = t \iff \sqrt{x} = t-1$

$\iff x = (t-1)^2$

$\Rightarrow$ • $\frac{dx}{dt} = 2\cdot(t-1) \Rightarrow dx = 2\cdot(t-1)\,dt$

• $x=0 \Rightarrow t = 1+\sqrt{0} = 1$
$x=1 \Rightarrow t = 1+\sqrt{1} = 2$

Quindi $I = \int_1^2 \underbrace{2(t-1)}_{f'} \cdot \underbrace{\ln(t)}_{g}\,dt$

$= \underbrace{(t-1)^2}_{f} \cdot \underbrace{\ln(t)}_{g}\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{(t-1)^2}{t}\,dt$

$= (2-1)^2\cdot\ln(2) - 0 - \int_1^2 \frac{t^2-2t+1}{t}\,dt \quad = t-2+\frac{1}{t}$

$= \ln(2) - \left[\frac{t^2}{2} - 2t + \ln(t)\right]_1^2$

$= \cancel{\ln(2)} - \cancel{\frac{4}{2}} + \cancel{4} - \cancel{\ln(2)} + \frac{1}{2} - \cancel{2} + 0$

$= \frac{1}{2}$