Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore 25.1.16

Firma: ....

Cognome .... Nome .... A.A. ....

Matricola .... Corso di Laurea ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di convergenza di una serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$.

(ii) Se $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge, allora la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} \cos(a_k)$

$\boxed{a}$ converge $\quad$ $\cancel{\boxed{b}}$ diverge a $+\infty$ $\quad$ $\boxed{c}$ è irregolare $\quad$ $\boxed{d}$ diverge a $-\infty$

(Giustificare la risposta.)

Risposta

(i) $\to$ appunti

(ii) $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ conv. $\overset{\text{C.N.}}{\Rightarrow} \lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \overset{\text{cos continua}}{\Rightarrow} \lim_{n\to+\infty} \cos(a_n) = 1$

cioè $b_n := \cos(a_n) \sim 1$ per $n \to +\infty$. Quindi per il crit. asintotico del confronto $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ e $\sum_{k=0}^{+\infty} 1 = +\infty$ hanno lo stesso carattere $\Rightarrow \boxed{b}$

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema degli zeri.

(ii) Verificare che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 - 2x^3 - 2$ ammette uno zero nell'intervallo $[1, 2]$.

Risposta

(i) $\to$ appunti

(ii)
- f è continua
- $f(1) = 1^5 - 2 \cdot 1^3 - 2 = 1 - 2 - 2 = -3 < 0$
- $f(2) = 2^5 - 2 \cdot 2^3 - 2 = 32 - 16 - 2 = 14 > 0$

$\overset{\text{teor. degli zeri}}{\Rightarrow}$ f ammette uno zero in $[1,2]$

Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\frac{1}{3} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sin(x) - \cosh(x)}{x^2 \cdot \ln(1+x)} =: f(x)$$

Risoluzione

• $\ln(1+x) \sim x$ per $x \to 0$ $\Rightarrow$ $x^2 \cdot \ln(x) \sim x^3$ per $x \to 0$

$\Rightarrow$ numeratore da sviluppare fino al 3° ordine:

• $e^x - \sin(x) - \cos(x) =$

$= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)$

$= \cancel{1} + \cancel{x} + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{6} - \cancel{x} + \frac{x^3}{6} - \cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + o(x^3)$

$= \frac{x^3}{3} + o(x^3) \sim \frac{x^3}{3}$ per $x \to 0$

$\Rightarrow f(x) \sim \frac{\frac{x^3}{3}}{x^3} = \frac{1}{3}$ per $x \to 0$ $\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 1/3$

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare l'integrale definito

$$I := \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x \cdot \left(\sin(x^2) - 1\right)\, dx = \frac{2-\pi}{4}$$

Risoluzione

Sost: $x^2 = t$ $\Rightarrow$ • $\frac{dt}{dx} = 2x$ cioè $\frac{dt}{2} = x \cdot dx$

• $x = 0 \Rightarrow t = 0^2 = 0$

• $x = \sqrt{\pi/2} \Rightarrow t = \left(\sqrt{\pi/2}\right)^2 = \pi/2$.

Quindi $I = \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \left(\sin(x^2) - 1\right) \cdot \overbrace{x \cdot dx}^{= \frac{dt}{2}}$

$= \int_0^{\pi/2} \left(\sin(t) - 1\right) \frac{dt}{2}$

$= \frac{1}{2}\left[-\cos(t) - t\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\left[-\overbrace{\cos(\pi/2)}^{=0} - \pi/2 - \left(-\overbrace{\cos(0)}^{=1} - 0\right)\right]$

$= \frac{1}{2}\left(1 - \pi/2\right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{2-\pi}{4}$

Esercizio 3

[4 punti]

Calcolare la derivata direzionale $D_v f(0,1)$ per $f(x,y) = y^2 - 2x$ e il versore $v = (1,0)$.

Risoluzione

Per $v = (1,0)$ vale $D_v f = f_x$

Quindi risulta $D_v f(x,y) = f_x(x,y) = -2$

$\Rightarrow D_v f(0,1) = \underline{\underline{-2}}$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - (x^2+y)\cdot(x^2-y)}{x^2+y^2} =: f(x,y)$$

Risoluzione

$$f(x,y) = \frac{x^4 - (x^4 - y^2)}{x^2+y^2} = \frac{+y^2}{x^2+y^2}$$

Ponendo $y = mx$ segue

$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{m^2x^2}{x^2+m^2\cdot x^2} = \frac{m^2}{1+m^2}$ dipende da $m \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ <u>non</u> esiste.

Esercizio 5

[6 punti]

Trovare il dominio, eventuali zeri, asintoti, intervalli di monotonia e punti di estremo locale della funzione $f(x) = e^{(x+\frac{4}{x})}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Zeri: $e^{t} > 0 \ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow e^{x+\frac{4}{x}} > 0 \ \forall x \neq 0$

$\Rightarrow$ non ci sono zeri

asintoti: • $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = e^{-\infty + \frac{4}{-\infty}} = e^{-\infty} = 0$

$\Rightarrow$ asintoto orizzontale $y = 0$ per $x \to -\infty$

• $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = e^{0^- + \frac{4}{0^-}} = e^{-\infty} = 0$

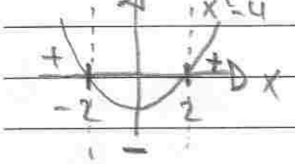
• $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = e^{0^+ + \frac{4}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty \Rightarrow$ asintoto verticale $x=0$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e^{+\infty + \frac{4}{+\infty}} = e^{+\infty} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \Rightarrow$

non c'è un asintoto obliquo.

Studio $f'(x)$: $f'(x) = e^{x+\frac{4}{x}} \cdot \left(1 - \frac{4}{x^2}\right) = \underbrace{\frac{e^{x+4/x}}{x^2}}_{>0\ \forall x\neq 0} \cdot (x^2-4)$

Quindi: segno di $f'(x)$ = segno di (x^2-4)



$\Rightarrow$ • f è crescente in $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

• f è decrescente in $(-2, 2) \setminus \{0\}$

• $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2 =: x_{1,2}$

• $f'(x)$ cambia segno in $x_1 = -2$ da "+" a "−" $\Rightarrow x_1$ è un pto di max. locale

• $f'(x)$ cambia segno in $x_2 = 2$ da "−" a "+" $\Rightarrow x_2$ è un pto di min locale