Analisi Matematica 1, Scritto 1-B. Durata della prova: 2 ore 25.1.16

Firma: ....

Cognome .... Nome .... A.A. ....

Matricola .... Corso di Laurea ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di divergenza a $+\infty$ di una serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$.

(ii) Se $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge, allora la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} e^{a_k}$

[a] diverge a $-\infty$ [b] converge [c] è irregolare ~~[d]~~ diverge a $+\infty$

(Giustificare la risposta.)

Risposta

(i)

$\to$ appunti.

(ii) $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ conv. $\overset{\text{C.N.}}{\Rightarrow} \lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \overset{e^x \text{ continua}}{\Rightarrow} \lim_{n\to+\infty} e^{a_n} = 1$ cioè

$b_n := e^{a_n} \sim 1$ per $n \to +\infty$. Quindi per il crit. del confronto asintotico $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ e $\sum_{k=0}^{+\infty} 1 = +\infty$ hanno lo stesso carattere

$\Rightarrow \boxed{d}$

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema degli zeri.

(ii) Verificare che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^3 + x^2 + 5$ ammette uno zero nell'intervallo $[2, 3]$.

Risposta

(i)

$\to$ appunti

(ii)

- f è continua
- $f(2) = -2^3 + 2^2 + 5 = -8 + 4 - 5 = 1 > 0$
- $f(3) = -3^3 + 3^2 + 5 = -27 + 9 + 5 = -13 < 0$

$\overset{\text{teor. degli zeri}}{\Rightarrow}$ f ammette uno zero in $[2, 3]$

Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$-\frac{1}{3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cosh(x) - e^x + \sin(x)}{x \cdot \ln(1+x^2)} =: f(x)$$

Risoluzione

• $\ln(1+x^2) \sim x^2$ per $x \to 0 \Rightarrow x \cdot \ln(1+x^2) \sim x \cdot x^2 = x^3$ per $x \to 0$

$\Rightarrow$ numeratore da sviluppare fino al 3° ordine.

• $\cosh(x) - e^x + \sin(x) = \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) - ($

$= \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)$

$= \cancel{1} + \cancel{\frac{x^2}{2}} \cancel{-1} \cancel{-x} - \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^3}{6} \cancel{+x} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = -\frac{x^3}{3} + o(x^3) \sim -\frac{x^3}{3}$ per $x \to 0$

$\Rightarrow f(x) \sim \frac{-x^3/3}{x^3} = -1/3$ per $x \to 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = -1/3$

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare l'integrale definito

$$I := \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x \cdot (1 + \cos(x^2))\, dx = \frac{2+\pi}{4}$$

Risoluzione

Sost.: $x^2 = t \Rightarrow \frac{dt}{dx} = 2x$ cioè $\frac{dt}{2} = x \cdot dx$

• $x = 0 \Rightarrow t = 0^2 = 0$

• $x = \sqrt{\pi/2} \Rightarrow t = (\sqrt{\pi/2})^2 = \pi/2$

Quindi $I = \int_0^{\sqrt{\pi/2}} (1 + \cos(x^2)) \cdot \underbrace{x\,dx}_{= dt/2} = \int_0^{\pi/2} (1 + \cos(t)) \cdot \frac{dt}{2}$

$= \frac{1}{2}\left[t + \sin(t)\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \underbrace{\sin(\pi/2)}_{=1} - 0 - \sin(0)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)$

$= \frac{2+\pi}{4}$

Esercizio 3

[4 punti]

Calcolare la derivata direzionale $D_v f(1,0)$ per $f(x,y) = x^2 + 2y$ e il versore $v = (0,1)$.

Risoluzione

Per $v=(0,1)$ vale $D_v f = f_y$.

Quindi risulta $D_v f(x,y) = f_y(x,y) = 2$

$$\Rightarrow D_v f(1,0) = \underline{\underline{2}}.$$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y)\cdot(x^2-y)-y^4}{x^2+y^2} =: f(x,y)$$

Risoluzione

$$f(x,y) = \frac{x^4 - y^4 - y^2}{x^2+y^2}$$

Ponendo $y = mx$ segue

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4 - m^4x^4 - m^2x^2}{x^2+m^2x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1-m^4}{1+m^2}\cdot x^2 - \frac{m^2}{1+m^2} \right)$$

$$= 0 - \frac{m^2}{1+m^2} = -\frac{m^2}{1+m^2}$$ dipende da $m \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ non esiste.

Esercizio 5

[6 punti]

Trovare il dominio, eventuali zeri, asintoti, intervalli di monotonia e punti di estremo locale della funzione $f(x) = e^{(4x+\frac{1}{x})}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Zeri: $e^t > 0 \ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow e^{4x+\frac{1}{x}} > 0 \ \forall x \neq 0$

$\Rightarrow$ non ci sono zeri

asintoti: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = e^{4(-\infty)+\frac{1}{-\infty}} = e^{-\infty} = 0 \Rightarrow$ asintoto orizzontale $y=0$ per $x \to -\infty$

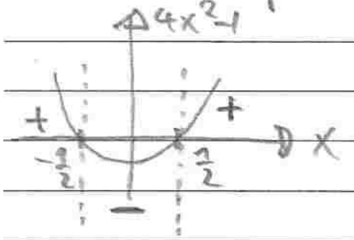
- $\lim_{x \to 0^-} f(x) = e^{4(0^-)+\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = 0$
- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = e^{4(0^+)+\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty \Rightarrow$ asintoto verticale $x=0$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = e^{4(+\infty)+\frac{1}{+\infty}} = e^{+\infty} = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \Rightarrow$

non c'è un'asintoto obliquo

Studio $f'(x)$: $f'(x) = e^{4x+\frac{1}{x}} \cdot \left(4 - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{e^{4x+1/x}}{x^2}(4x^2-1)$

$\frac{e^{4x+1/x}}{x^2} > 0 \ \forall x \neq 0$

Quindi: segno di $f'(x)$ = segno di $(4x^2-1)$



$\Rightarrow$ • f è crescente in $(-\infty, -1/2) \cup (1/2, +\infty)$
• f è decrescente in $(-1/2, 1/2) \setminus \{0\}$
• $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1/2 =: x_{1,2}$

- $f'(x)$ cambia segno in $x_1 = -1/2$ da "+" a "−" $\Rightarrow x_1$ è un pto. di max. locale
- $f'(x)$ cambia segno in $x_2 = 1/2$ da "−" a "+" $\Rightarrow x_2$ è un pto. di min locale.