Analisi Matematica 1, Scritto 1-B. Durata della prova: 2 ore 25.1.17

Firma: .....

Cognome ..... Nome ..... A.A. .....

Matricola ..... Corso di Laurea .....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di convergenza di una serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$.

(ii) Fare l'esempio di una serie con $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = 1$.

Risposta

(i) → compito A

(ii) P.e. $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$ (serie di Mengoli)

(oppure: sia $a_1 = 1$, $a_k = 0 \ \forall k \geq 2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = 1$)

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema degli zeri.

(ii) Verificare che la funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+x) + x - 1$ ammette uno zero.

Risposta

(i) → compito A

(ii)
- f è continua
- $f(0) = \ln(1) - 1 = -1 < 0$
- $f(1) = \ln(2) + 1 - 1 = \ln(2) > 0$

$\xrightarrow{\text{teor. degli zeri}} \exists c \in (0,1)$ t.c. $f(c) = 0$.

Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sinh(x) - \cos(x)}{1 - \cos(x)}$$

Risoluzione

• Denominatore: $1-\cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$ per $x \to 0$

$\Rightarrow$ Numeratore da sviluppare fino al 2° ordine:

$$e^x - \sinh(x) - \cos(x) = \cancel{1} + \cancel{x} + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - (\cancel{x} + o(x^2)) - (\cancel{1} - \frac{x^2}{2} + o(x^2))$$

princ. di sostituzione $\Rightarrow$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + o(x^2) = x^2 + o(x^2) \sim x^2 \quad \text{per } x \to 0$$

$$\frac{e^x - \sinh(x) - \cos(x)}{1-\cos(x)} \sim \frac{x^2}{\frac{x^2}{2}} = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sinh(x) - \cos(x)}{1-\cos(x)} = 2$$

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare, se converge, l'integrale improprio

$$I := \int_0^1 \frac{2+3x}{2\sqrt{x}}\, dx$$

Risoluzione

$$I = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{2+3x}{2\sqrt{x}}\, dx = \lim_{a\to 0^+} \left(\int_a^1 x^{-1/2} + \frac{3}{2} x^{1/2}\, dx \right)$$

$$= \lim_{a\to 0^+} \left(2 \cdot x^{1/2} \Big|_a^1 + x^{3/2} \Big|_a^1 \right)$$

$$= \lim_{a\to 0^+} \left(2 \cdot (1^{1/2} - \underbrace{a^{1/2}}_{\to 0}) + 1^{3/2} - \underbrace{a^{3/2}}_{\to 0} \right)$$

$$= 2 + 1 = 3$$

Esercizio 3

[4 punti]

Calcolare la derivata direzionale $D_v f(1,-2)$ per $f(x,y) = x \cdot y^2$ e il versore $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Risoluzione

- $f_x(x,y) = y^2 \Rightarrow f_x(1,-2) = 4$

  $f_y(x,y) = 2x \cdot y \Rightarrow f_y(1,-2) = -2 \cdot 2 = -4$

- f è $C^1 \Rightarrow f$ è differenziabile, quindi per il teor. del gradiente segue

$$D_v f(1,-2) = \text{grad} f(1,-2) \cdot v = (4,-4) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{4 \cdot \sqrt{2}}}$$

Esercizio 4

[5 punti]

Studiare la continuità, derivabilità e differenziabilità in $(x_0, y_0) = (0,0)$ della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x) \cdot y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Risoluzione

Procedendo come nel compito A segue:

- f non è continua in $(0,0) \Rightarrow$

  f non è differenziabile in $(0,0)$

- f è derivabile con $\text{grad} f(0,0) = (0,0)$

Esercizio 5

[5 punti]

Trovare il dominio, eventuali zeri, asintoti e punti di estremo locale della funzione $f(x) = \dfrac{x^2-5}{x-3}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

- Dominio: $x-3 \neq 0$, quindi dominio di $f = \boxed{\mathbb{R} \setminus \{3\}}$
- Zeri: $f(x) = 0 \iff x^2-5=0 \iff \boxed{x = \pm\sqrt{5}}$
- Asintoti: • $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \frac{9-5}{0^+} = +\infty$, $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \frac{9-5}{0^-} = -\infty$

$\Rightarrow \boxed{x=-3}$ è un'asintoto verticale

• $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \Rightarrow$ possibili asintoti obliqui

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-5}{x\cdot(x-3)} = 1$$

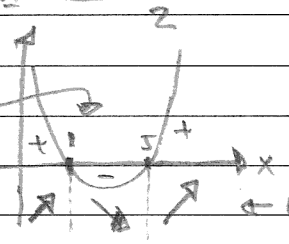
$$q = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - m\cdot x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2-5}{x-3} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^2}-5-\cancel{x^2}+3x}{x-3} = 3$$

$\Rightarrow \boxed{y = x+3}$ è un'asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$

- Derivata: $f'(x) = \dfrac{(x-3)\cdot 2x - 1\cdot(x^2-5)}{(x-3)^2} = \dfrac{2x^2-6x-x^2+5}{(x-3)^2} = \dfrac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}$

$$= 0 \iff x = x_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-4\cdot 5}}{2} = \frac{6\pm 4}{2} = \begin{cases} 5 \\ 1 \end{cases}$$

segno di $f'(x)$ = segno di x^2-6x+5



$\Rightarrow$ $\boxed{x_1 = 5}$ è un pto. di min locale

$\boxed{x_2 = 1}$ —— " —— max —— " ——

← (de) crescenza di f

Grafico: