26.2.21

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di convergenza di una serie numerica $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

(ii) Dare un esempio di una serie con $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sin(1)$.

<u>Sol:</u> (i) La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge se la successione delle somme parziali n-esime $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dove $s_n := a_0 + a_1 + \dots + a_n$.

ii) Visto che

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

segue

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} = \sin(1).$$

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema di Weierstraß.

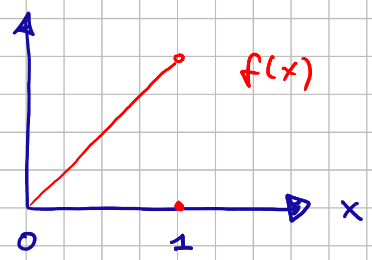
(ii) Dare un esempio (anche grafico) di una funzione $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ che non ammette massimo locale.

<u>Sol:</u> (i) Ogni funzione continua $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ammette minimo e massimo.

ii) P.e.

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1) \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

non ammette massimi locali



Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x^x) - \ln(x)}{1 - \cos(x-1)}$$

<u>Sol:</u>

$\ln(a^r) = r \cdot \ln(a)$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x^x) - \ln(x)}{1 - \cos(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x \cdot \ln(x) - \ln(x)}{1 - \cos(x-1)} \quad \left(= \frac{1 \cdot 0 - 0}{1 - 1} = \frac{0}{0} \right)$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x\to 1} \frac{x \cdot \frac{1}{x} + 1 \cdot \ln(x) - \frac{1}{x}}{-(-\sin(x))} = \lim_{x\to 1} \frac{1 + \ln(x) - \frac{1}{x}}{\sin(x)} \quad \left(= \frac{1 + 0 - \frac{1}{1}}{0} = \frac{0}{0} \right)$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x} - \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\cos(x)} = \frac{1 + \frac{1}{1^2}}{1} = 2$$

<u>N.B.:</u> Per una soluzione alternativa → ultima pagina

Esercizio 2

[5 punti]

Trovare gli estremi locali della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \arctan\left(2x^3 - 3x^2\right)$ e classificarli.

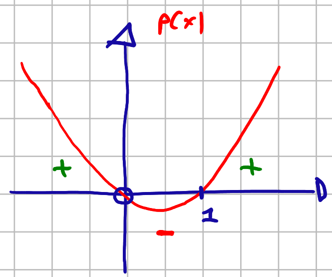
Sol: • f è derivabile e il dominio $\mathbb{R}$ non ha bordo, quindi per il teorema di Fermat ogni punto di estremo locale è un punto critico di f.

• La derivata di f è data da

$$f'(x) = \frac{1}{1+(2x^3-3x^2)^2} \cdot (6x^2 - 6x)$$

$$= \underbrace{\frac{6}{1+(2x^3-3x^2)^2}}_{>0 \ \forall x \in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{x \cdot (x-1)}_{=:\, p(x)}$$

$$= 0 \iff x = 0 \text{ oppure } x = 1$$



• $f'(x)$ cambia segno in

- $x=0$ da "+" a "−" $\Rightarrow$ $x=0$ è un pto. di max locale
- $x=1$ da "−" a "+" $\Rightarrow$ $x=1$ è un pto. di min locale

---

Esercizio 3

[5 punti]

Calcolare, se converge, l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+3x+2}$$

Sol: Calcoliamo prima l'integrale indefinito

$$\int \frac{dx}{x^2+3x+2} =$$

$$\int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) dx =$$

$$\ln(x+1) - \ln(x+2) + c =$$

$$\ln\left(\frac{x+1+1-1}{x+2}\right) + c =$$

$$\ln\left(1 - \frac{1}{x+2}\right) + c$$

• $x^2+3x+2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{\overbrace{3^2-4\cdot 2}^{=1}}}{2} = \begin{cases} -2 \\ -1 \end{cases}$

• $\dfrac{1}{x^2+3x+2} \overset{!}{=} \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x+2}$

$$\frac{0\cdot x+1}{x^2+3x+2} = \frac{Ax+2A+Bx+B}{(x+1)\cdot(x+2)} = \frac{(A+B)x + 2A+B}{x^2+3x+2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B = 0 \\ 2A+B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

Quindi segue

$$\int_0^b \frac{dx}{x^2+3x+2} = \left[\ln\left(1-\frac{1}{x+2}\right)\right]_0^b =$$

$$= \ln\left(1-\frac{1}{b+2}\right) - \ln\Big(\overbrace{1-\frac{1}{2}}^{=\frac{1}{2}}\Big)$$

$-\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2)$

$$= \ln(2) + \ln\left(1-\frac{1}{b+2}\right)$$

$\frac{1}{b+2} \to 0$

$\to \ln(1+0) = \ln(1) = 0$

$\to \ln(2)$ per $b \to +\infty$

cioè

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+3x+2} = \ln(2)$$

Esercizio 4 [4 punti]

Dati la funzione $f(x,y) = 2xy$ e il versore $v = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, determinare i punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tale che la derivata direzionale $D_v f(x,y) = 1$.

<u>Sol:</u> • $f_x(x,y) = 2y$, $f_y(x,y) = 2x$. Quindi la funzione è C^1 e per il teorema del gradiente segue

$$D_v f(x,y) = \cancel{2}y \cdot \frac{1}{\cancel{2}} + \cancel{2}x \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = y + \sqrt{3}\cdot x \overset{!}{=} 1$$

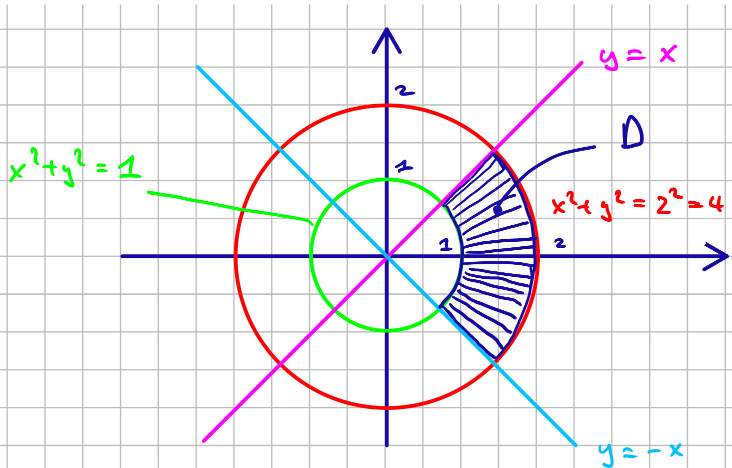
$$\Longleftrightarrow \quad y = 1 - \sqrt{3}x .$$

Quindi vale $D_v f(x,y) = 1 \Longleftrightarrow y = 1 - \sqrt{3}x$

Esercizio 5 [5 punti]

Disegnare il dominio $D = \{(x,y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ -x \leq y \leq x\}$ e calcolare la sua misura $|D|$.

<u>Sol:</u>



D corrisponde a $D' = \{(\rho,\vartheta) \mid 1 \le \rho \le 2, -\frac{\pi}{4} \le \vartheta \le \frac{\pi}{4}\} = [1,2] \times [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ in coordinate polari. Quindi segue

$$|D| = \iint_D 1 \, dx\, dy = \iint_{D'} \rho \cdot d\rho\, d\vartheta$$

$$= \int_{\rho=1}^{2} \int_{\vartheta=-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \rho \cdot d\vartheta\, d\rho = \int_{\rho=1}^{2} \rho \cdot \vartheta \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} d\rho$$

$$= \int_1^2 \rho \cdot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) d\rho = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\rho^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{\pi}{4} \cdot (2^2 - 1^2)$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \pi$$

E 1 Soluzione alternativa :

$$\lim_{x \to 1} \frac{\overbrace{\ln(x^x)}^{= x \cdot \ln(x)} - \ln(x)}{1 - \cos(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1) \cdot \ln(x)}{1 - \cos(x-1)}$$

Pongo $x - 1 = t \Rightarrow$

- $t \to 0$ se $x \to 1$,
- $x = 1 + t$

$$\lim_{t \to 0} \frac{(t \cdot \ln(1+t)) : t^2}{(1 - \cos(t)) : t^2} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\ln(1+t)}{t} \to 1}{\frac{1 - \cos(t)}{t^2} \to \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$