Analisi Matematica 1. Scritto A. Durata della prova: 2 ore 26.6.15

Cognome .... Nome ....

Matricola .... Corso di Laurea ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di convergenza assoluta per una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

(ii) Fare un esempio di una serie tale che $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| = 2$.

Risposta

(i) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge assolutamente se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge (semplicemente)

(ii) p.e. $\sum_{n=0}^{+\infty} |q^n| = \frac{1}{1-|q|} = 2$ per $q = \pm \frac{1}{2}$

Domanda 2

[3 punti]

Sia $f \in C^1[a,b]$ tale che $f'(a) \cdot f'(b) < 0$. Allora

- [a] f è decrescente
- [b] f ha un unico punto di massimo in $[a,b]$
- [~~c~~] f ha un punto critico in $[a,b]$
- [d] esiste $c \in [a,b]$ tale che $f(c) = 0$

Risposta

Dal teorema degli zeri segue che $\exists\, c \in (a,b)$ t.c. $f'(c) = 0$ cioè c è un pto. critico

Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare. se esiste. il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh(x) - e^{-x} - \sin(x)}{x^2 \cdot \ln(1+x)} = 1/3$$

Risoluzione

• $\ln(1+x) \sim x$ per $x \to 0 \Rightarrow x^2 \cdot \ln(1+x) \sim x^3$

$\Rightarrow$ numeratore da sviluppare fino al 3° ordine.

• $\cosh(x) - e^{-x} - \sin(x) =$

$1 + \frac{x^2}{2} - \left(1 + (-x) + \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{6}\right) - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + o(x^3)$

$= \cancel{1} + \cancel{\frac{x^2}{2}} - \cancel{1} + \cancel{x} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{6} - \cancel{x} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

$= \frac{x^3}{3} + o(x^3) \sim \frac{x^3}{3}$ per $x \to 0$ $\Rightarrow$

$\frac{\cosh(x) - e^{-x} - \sin(x)}{x^2 \ln(1+x)} \sim \frac{x^3/3}{x^3} = 1/3 =$ limite per $x \to 0$

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare l'integrale

$$I := \int_1^e \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\, dx$$

Risoluzione

$\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\, dx = \int \underbrace{x^{-1/2}}_{f'} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{g}\, dx \overset{\text{i.p.p.}}{=} \underbrace{\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}}_{f} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{g} - \int$

$= \underbrace{\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}}_{f} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{g} - \int \underbrace{\frac{x^{1/2}}{1/2}}_{f} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'}\, dx$

$= 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \ln(x) - 2 \int x^{-\frac{1}{2}}\, dx$

$= 2\sqrt{x} \cdot \ln(x) - 2 \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1/2} + \text{cost.}$

$= 2\sqrt{x}\,(\ln(x) - 2) + \text{cost.}$

$\Rightarrow I = \left[2\sqrt{x}\,(\ln(x) - 2)\right]_1^e = 2\left[\sqrt{e}\,(\underbrace{\ln(e)}_{=1} - 2) - \sqrt{1}\,(\underbrace{\ln(1)}_{=0} - 2)\right]$

$= 2(\sqrt{e}\,(-1) + 2) = \underline{\underline{4 - 2\sqrt{e}}}$

Esercizio 3

[4 punti]

Trovare i punti $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ in cui il piano tangente al grafico di $f(x,y) = (x^2+y) \cdot e^{x-y}$ è orizzontale.

Risoluzione

Piano tg.le orizzontale in $(x_0, y_0) \iff \begin{cases} f_x(x_0,y_0) = 0 \text{ e} \\ f_y(x_0,y_0) = 0. \end{cases}$

$0 = f_x(x,y) = 2x \cdot e^{x-y} + (x^2+y)\, e^{x-y} = (x^2+y+2x) \cdot e^{x-y} \neq 0 \ \forall x,y \in \mathbb{R}$

$0 = f_y(x,y) = 1 \cdot e^{x-y} + (x^2+y)\, e^{x-y}(-1) = (-x^2-y^2+1) \cdot e^{x-y}$

$\Rightarrow$ (sommando le equazioni): $2x+1=0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ (sostituendo in $x^2+y+2x=0$): $0 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + y + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = \overbrace{\frac{1}{4} - 1}^{-3/4} + y$

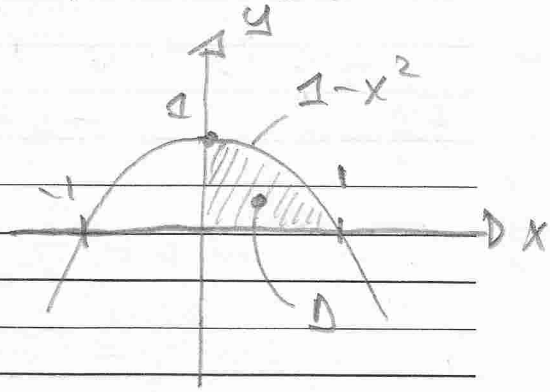
$\Rightarrow y = 3/4$. Quindi il piano tg.le è orizzontale solo nel pto. $(x_0, y_0) = (-1/2, 3/4)$.

Esercizio 4

[4 punti]

Disegnare il dominio $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } x^2 + y \leq 1\}$ e calcolare l'integrale

$$I := \iint_D x \cdot y \, dx\, dy$$



Risoluzione

- $x^2+y \leq 1 \iff y \leq 1-x^2$
- Fubini-Tonelli:

$$I = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1-x^2} x \cdot y \, dy\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} x \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=1-x^2} dx = \int_0^1 x \cdot \left(\frac{(1-x^2)^2}{2} - 0\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x \cdot (1-2x^2+x^4)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x - 2x^3 + x^5 \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{2}{4}x^4 + \frac{x^6}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left[\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}\right] = \frac{1}{12}$$

Esercizio 5 [7 punti]

Trovare il dominio, eventuali zeri, asintoti, intervalli di monotonia e punti di estremo locale della funzione $f(x) = x \cdot e^{\frac{x-1}{x-2}}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

- dominio: $\mathbb{R} \setminus \{2\}$
- $f(x) = 0 \iff x = 0$
- $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \underbrace{x}_{\to \pm\infty} \cdot e^{\overbrace{\frac{x-1}{x-2}}^{\to 1}} = \pm\infty \Rightarrow$ possibilità di asintoti obl. $\quad e>0$

$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{x-1}{x-2}} = e^1 = e =: m \qquad h := \frac{1}{x-2} \to 0$ per $x \to \pm\infty$

$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to \pm\infty} x \cdot \left(e^{\frac{x-1}{x-2}} - e\right) = \lim_{x \to \pm\infty} x \cdot e \cdot \left(e^{\frac{x-1-(x-2)}{x-2}} - 1\right)$

$= e \cdot \lim_{x \to \pm\infty} \underbrace{\frac{x}{x-2}}_{\to 1} \cdot \frac{e^{\overbrace{1/x-2}^{=h}} - 1}{\underbrace{1/x-2}_{=h}} \to 1$ per $x \to 0$

$= e =: q$

$\Rightarrow y = e \cdot x + e$

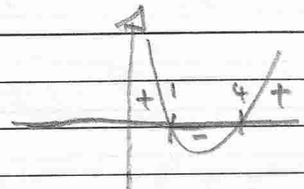
- $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \underbrace{x}_{\to 2} \cdot e^{\overbrace{\frac{x-1}{x-2}}^{\to +\infty}} = +\infty, \quad e^{+\infty} = +\infty$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \underbrace{x}_{\to 2} \cdot e^{\overbrace{\frac{x-1}{x-2}}^{\to -\infty}} = 0. \quad e^{-\infty} = 0$

- $f'(x) = 1 \cdot e^{\frac{x-1}{x-2}} + x \cdot e^{\frac{x-1}{x-2}} \cdot \frac{(x-2)\cdot 1 - 1\cdot(x-1)}{(x-2)^2} = e^{\frac{x-1}{x-2}} \left(1 - x \cdot \frac{1}{(x-2)^2}\right)$

$= \underbrace{e^{\frac{x-1}{x-2}}}_{>0\ \forall x} \cdot \frac{x^2 - 5x + 4}{\underbrace{(x-2)^2}_{>0}} = 0 \iff x^2 - 5x + 4 = 0 \iff x = \begin{cases} 1 \\ 4 \end{cases}$ opp.

- Segno di $f'(x)$ = Segno di $x^2 - 5x + 4$



$\Rightarrow$ · f crescente in $(-\infty, 1)$ e $(4, +\infty)$
· f decrescente in $(1, 4) \setminus \{2\}$

$\Rightarrow x_0 = 1$ pto. di max loc.
$x_1 = 4$ pto. di min. loc.