Analisi Matematica (1) $\boxed{\text{9 CFU}}$ Durata della prova: 2 ore 26.9.14

Firma: ....

Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola: .... **Corso di Laurea:** ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

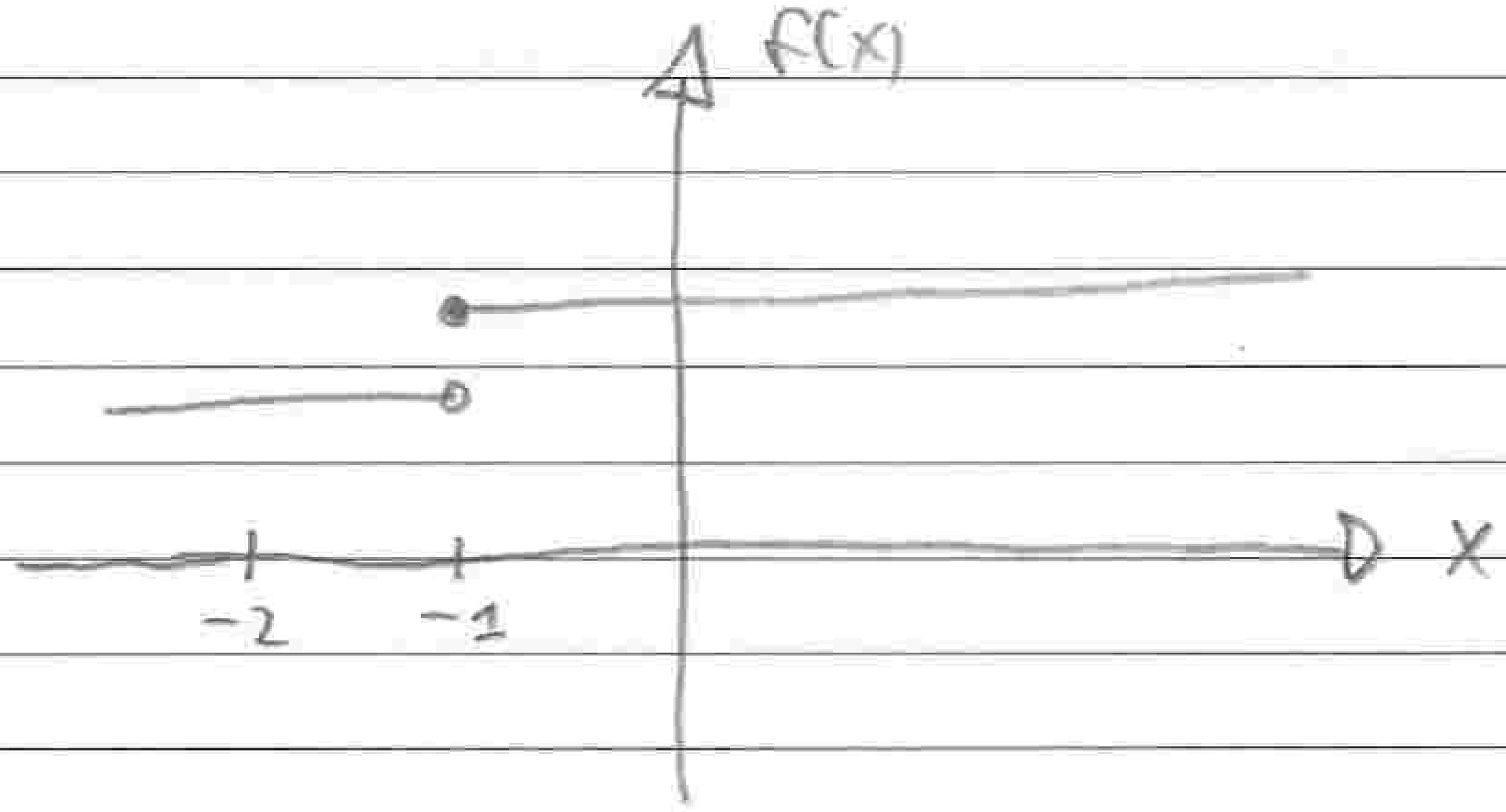
(i) Per $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dare la definizione di funzione continua in x_0.

(ii) Disegnare il grafico di una funzione continua in $x = -2$ e non continua in $x = -1$.

Risposta

(i) cfr. appunti

(ii)



Domanda 2

[4 punti]

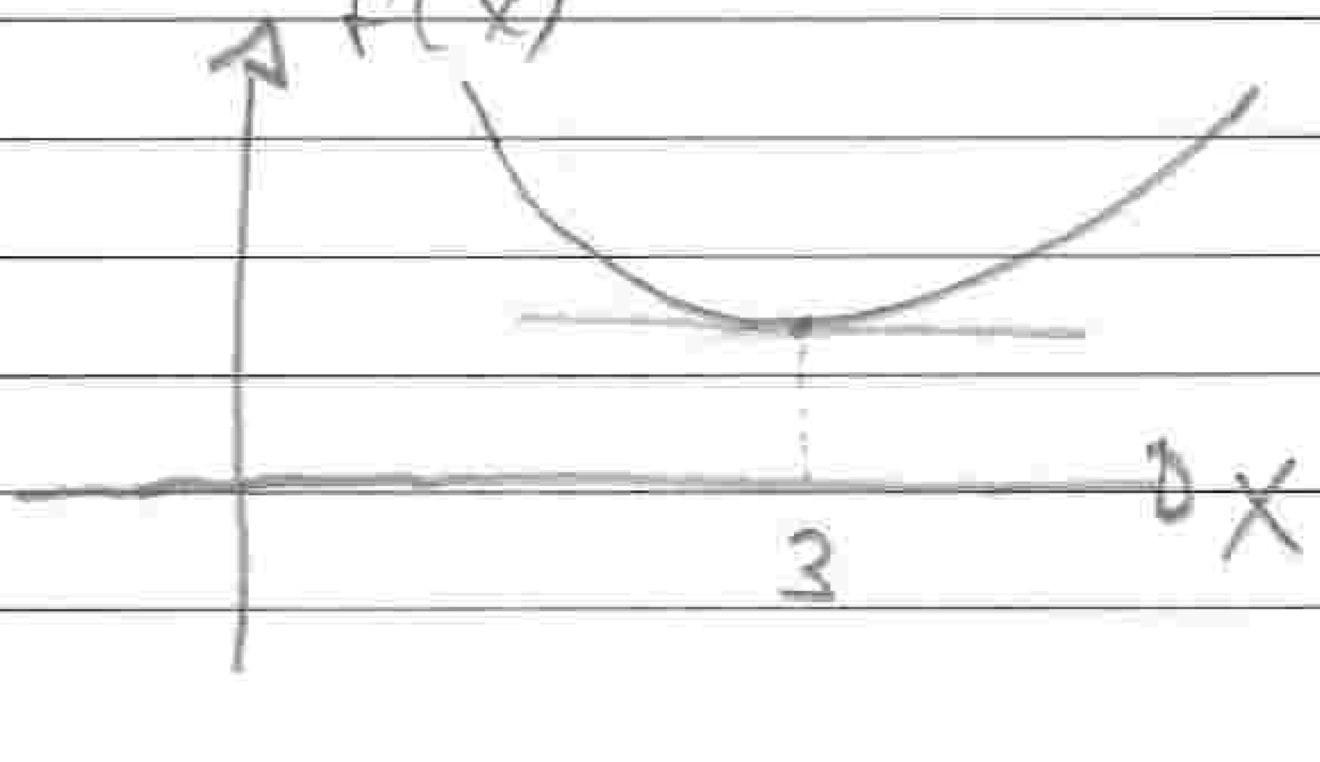
(i) Enunciare il teorema di Rolle.

(ii) Disegnare il grafico di una funzione con derivata nulla in $x = 3$.

Risposta

(i) cfr. appunti

(ii)



$f'(3) = 0 \Leftrightarrow$ retta tangente orizzontale

Esercizio 1

[4 punti]

Studiare il comportamento della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\sin\left(\frac{n+5}{n^2+7}\right)\right)$

Risoluzione

$\frac{n+5}{n^2+7} \sim \frac{n}{n^2} \sim \frac{1}{n} \to 0$ per $n \to +\infty$.

Visto che $\sin(x) \sim x$ per $x \to 0$ e
$\ln(1+x) \sim x$ per $x \to 0$

segue
$\sin\left(\frac{n+5}{n^2+7}\right) \sim \frac{n+5}{n^2+7} \sim \frac{1}{n}$ e quindi

$\ln\left(1+\sin\left(\frac{n+5}{n^2+7}\right)\right) \sim \sin\left(\frac{n+5}{n^2+7}\right) \sim \frac{1}{n}$ per $n \to +\infty$

$\Rightarrow$ la serie diverge per il criterio asintotico del confronto (poiché $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ è divergente)

Esercizio 2

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-\ln(1+x^2)}{x^4}$$

Risoluzione

poniamo $x^2 = t \to 0$ per $x \to 0$. Così risulta

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-\ln(1+x^2)}{x^4} = \lim_{t\to 0} \frac{t-\ln(1+t)}{t^2} \quad \left(= \frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{t\to 0} \frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}$$

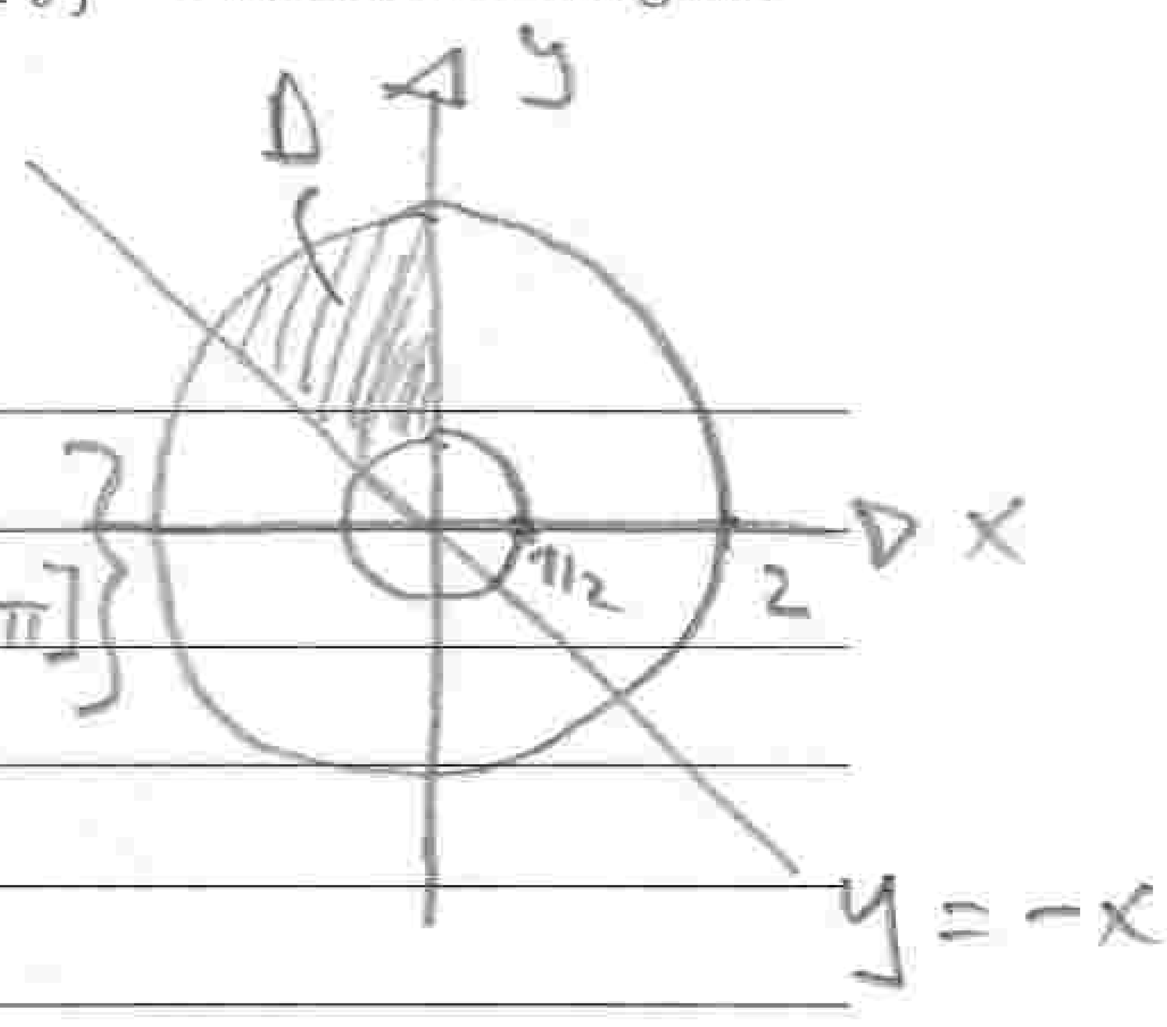
$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1+t-1}{1+t}}{2t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{1+t}}{2} = \frac{1}{2}$$

Esercizio 3

[5 punti]

Disegnare il dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4} \le x^2 + y^2 \le 4,\ x \le 0,\ -x \le y\}$ e calcolare l'integrale

$$I := \iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$$



Risoluzione

D corrisponde a $D' = \left\{(\rho, \vartheta) : \rho \in [1/2, 2],\ \vartheta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi]\right\}$

in coordinate polari.

Quindi risulta:

$$I = \int_{1/2}^{2} \int_{\pi/2}^{3/4\pi} \frac{\cancel{\rho} \cdot \sin(\vartheta)}{\cancel{\rho}} \cdot \rho \, d\vartheta \, d\rho$$

$$= \int_{1/2}^{2} \rho \, d\rho \cdot \int_{\pi/2}^{3/4\pi} \sin(\vartheta)\, d\vartheta = \frac{\rho^2}{2}\Big|_{1/2}^{2} \cdot (-\cos\vartheta)\Big|_{\pi/2}^{3/4\pi}$$

$$= \frac{4 - \frac{1}{4}}{2} \cdot \left(+\frac{\sqrt{2}}{2} + 0\right) = \frac{15\sqrt{2}}{16}$$

Esercizio 4

[5 punti]

Scrivere il piano tangente al grafico di $f(x, y) = \ln(10 + 3x^2 + y^2)$ nel punto $(1, 2)$.

Risoluzione

$$p(x,y) = f(1,2) + f_x(1,2)\cdot(x-1) + f_y(1,2)\cdot(y-2)$$

- $f(1,2) = \ln(10+3+2^2) = \ln(17)$
- $f_x(x,y) = \frac{1 \cdot 6x}{10+3x^2+y^2} \Rightarrow f_x(1,2) = \frac{6}{17}$
- $f_y(x,y) = \frac{1 \cdot 2y}{10+3x^2+y^2} \Rightarrow f_y(1,2) = \frac{4}{17}$

$$\Rightarrow \quad p(x,y) = \ln(17) + \frac{6}{17}(x-1) + \frac{4}{17}(y-2)$$

Esercizio 5

[6 punti]

Trovare il dominio, eventuali zeri, asintoti, intervalli di monotonia e punti di estremo locale della funzione $f(x) = \frac{x-4}{e^x}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

- dominio: tutto $\mathbb{R}$

- $f(x) = 0 \iff x-4=0 \iff x=4$

- $\lim_{x\to-\infty} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-4}{e^x} \left(= \frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{(H)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

  $\Rightarrow y=0$ è un asintoto orizzontale per $x\to+\infty$

- $f'(x) = \left[(x-4)\cdot e^{-x}\right]' = 1\cdot e^{-x} + (x-4)(-1)e^{-x}$

  $= (5-x)\cdot e^{-x}$ ($e^{-x} > 0$ sempre) $\Rightarrow \begin{cases} \bullet\, f'(x) > 0 \iff 5-x>0 \\ \qquad\qquad \iff x<5 \\ \bullet\, f'(x)<0 \iff x>5 \end{cases}$

$\Rightarrow f$ è strett. crescente in $(-\infty, 5)$ e strett. decrescente in $(5, +\infty)$

$\Rightarrow x_0 = 5$ è un pto. di massimo

grafico:

$(f(0) = -4)$