Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore **27.1.14**

Firma: ....

Cognome .... **Nome** .... **A.A.** ....

Matricola .... **Corso di Laurea** ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di convergenza per una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

(ii) Fare un esempio di una serie tale che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$.

Risposta

(i) Sia $S_n := a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge alla somma $s \in \mathbb{R}$ se $\lim_{n \to +\infty} S_n = s$.

(ii) La serie armonica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

Domanda 2

[4 punti]

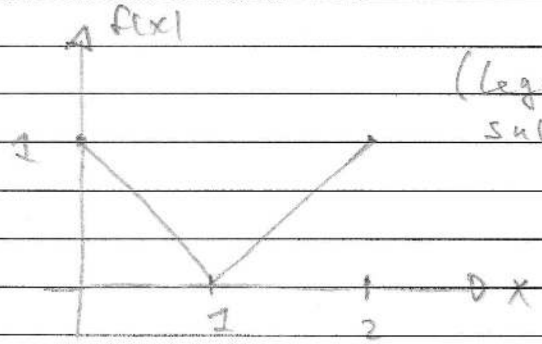
(i) Enunciare il teorema degli zeri.

(ii) Dire se esiste una funzione $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ con $f(0) \cdot f(2) = 1$ e $f(1) = 0$. Giustificare la risposta (anche graficamente).

Risposta

(i) cfr. compito 1-A

(ii) Sì, esiste: (leggere la nota sul compito 1-B!!)



Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+\sin(x)-e^x+\cos(x)}{x^2\cdot\ln\big(1+\sin(x)\big)} = \underline{\underline{-1/3}}$$

Risoluzione

<u>Denominatore:</u> $\ln(1+t) \sim t$ per $t \to 0$ e $\sin(x) = t \to 0$ per $x \to 0$

$\Rightarrow \ln(1+\sin(x)) \sim \sin(x) \sim x$ per $x \to 0$ $\Rightarrow$

$x^2 \cdot \ln(1+\sin(x)) \sim x^2 \cdot x = x^3$ per $x \to 0$.

<u>Numeratore:</u> Da sviluppare fino al 3° ordine:

$x^2+\sin(x)-e^x+\cos(x) = \cancel{x^2}+(\cancel{x}-\frac{x^3}{6})-(\cancel{1}+\cancel{x}+\cancel{\frac{x^2}{2}}+\frac{x^3}{6})+(\cancel{1}-\cancel{\frac{x^2}{2}})+o(x^3)$

$= \left(-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\right)x^3+o(x^3) = -\frac{x^3}{3}+o(x^3) \sim -\frac{x^3}{3}$ per $x \to 0$

$\Rightarrow \frac{N(x)}{D(x)} \sim \frac{-x^3/3}{x^3} = -1/3 = \text{limite}$

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare l'integrale definito

$$I := \int_1^e \frac{\ln(x^2)}{\sqrt{x}}\,dx$$

Risoluzione

$I = \int_1^e \underbrace{x^{-1/2}}_{f'} \cdot 2 \cdot \underbrace{\ln(x)}_{g}\,dx \overset{\text{I.P.P.}}{=} 2\cdot\left(\left[2\cdot \underbrace{x^{1/2}}_{f}\cdot \underbrace{\ln(x)}_{g}\right]_1^e - \int_1^e 2\cdot \underbrace{x^{1/2}}_{f}\cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'}\,dx\right)$, $\quad x^{1/2}\cdot\frac{1}{x} = x^{-1/2}$

$= 2\cdot\left(2\cdot\sqrt{e}\cdot\underbrace{\ln(e)}_{=1} - 2\sqrt{1}\cdot\underbrace{\ln(1)}_{=0} - 2\left[2\cdot x^{1/2}\right]_1^e\right)$

$= 4\cdot\sqrt{e} - 8\sqrt{e} + 8\sqrt{1} = \underline{\underline{8-4\sqrt{e}}}$

Esercizio 3

[3 punti]

Calcolare la derivata direzionale $D_v f(2,1)$ per $f(x,y) = x^2 - 2xy$ e il versore $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Risoluzione

Si procede come nel compito 1-B:

$$\left.\begin{array}{l} f_x(x,y) = 2x - 2y \\ f_y(x,y) = -2x \end{array}\right\} \Rightarrow \nabla f(2,1) = (2\cdot 2 - 2\cdot 1, -2\cdot 2) = (2, -4)$$

$$\Rightarrow D_v f(2,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot(2,-4) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 4$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2 \cdot y) - (x+y)\cdot(x-y)}{x^2+y^2}.$$

$=: f(x,y)$

Risoluzione

Poniamo $y = mx$. Come nel compito 1-B risulta

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2 \cdot mx) - (x+mx)\cdot(x-mx)}{x^2 + m^2\cdot x^2} = \dots$$

$$= 0 + \frac{1-m^2}{1+m^2}.$$

Quindi il limite dipende da $m \Rightarrow$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ non esiste.

Esercizio 5

[7 punti]

Trovare il dominio, eventuali zeri, asintoti, intervalli di monotonia e punti di estremo locale della funzione $f(x) = \dfrac{x^2-3}{e^x}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

Si procede come nel compito 1-B:

Dominio = tutto $\mathbb{R}$

Zeri: $f(x) = 0 \iff x^2 - 3 = 0 \iff x = \pm\sqrt{3}$

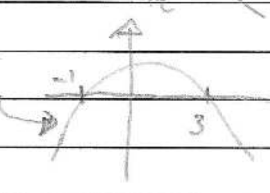
Asintoti: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$ (p.e. 2-volte l'Hospital)

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-3}{e^x} = \ldots = 0 \implies y = 0$ è un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$

Derivata: $f'(x) = \ldots = \dfrac{-x^2+2x+3}{\underbrace{e^x}_{>0 \text{ sempre}}} \implies$

$f'(x) = 0 \iff -x^2+2x+3 = 0 \iff x = x_{1/2} = -1$ opp. $+3$

segno di f' = segno di $(-x^2+2x+3)$ $\implies$



- f è crescente in $(-1, 3)$ e
- f è decrescente in $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

Segno di f: $f(x) \geq 0 \iff x^2 \geq 3 \iff x \leq -\sqrt{3}$ opp. $x \geq \sqrt{3}$

Simmetrie: No.