Analisi Matematica 1, Scritto 1-B. Durata della prova: 2 ore **27.1.14**

Firma: ....

Cognome .... **Nome** .... **A.A.** ....

Matricola .... **Corso di Laurea** ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di divergenza a $+\infty$ per una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

(ii) Fare un esempio di una serie tale che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1$.

Risposta

(i) Sia $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$. Allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$

se $\lim_{n \to +\infty} s_n = +\infty$

(ii) La serie di Mengoli: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema degli zeri.

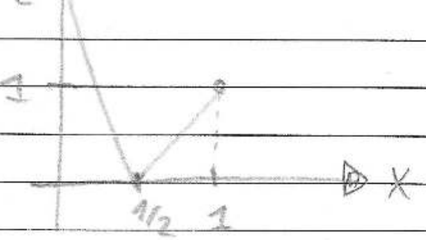
(ii) Dire se esiste una funzione $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ con $f(0) \cdot f(1) = 2$ e $f(\frac{1}{2}) = 0$. Giustificare la risposta (anche graficamente).

Risposta

(i) Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$,

allora $\exists\, c \in (a, b)$ t. c. $f(c) = 0$.

(ii) Sì, esiste:



NB: La condizione "$f(a) \cdot f(b) < 0$" nel teorema degli zeri è soltanto una condizione sufficiente ma non necessaria per l'esistenza di uno zero!!

Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\ln(1+x)-\cos(x)-\sin(x)}{x^2\cdot\left(1-e^{\sin(x)}\right)} = -1/2$$

Risoluzione

Denominatore: $e^t - 1 \sim t$ per $t \to 0$, $\sin(x) = t \to 0$ per $x \to 0$

$\Rightarrow 1 - e^{\sin(x)} \sim -\sin(x) \sim -x$ per $x \to 0 \Rightarrow$

$x^2 \cdot (1 - \sin(x)) \sim -x^3$ per $x \to 0$

Numeratore: Da sviluppare fino al 3° ordine:

$1 + \ln(1+x) - \cos(x) - \sin(x) =$

$\cancel{1} + \left(\cancel{x} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{3}\right) - \left(\cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2}}\right) - \left(\cancel{x} - \frac{x^3}{6}\right) + o(x^3) = x^3\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) + o(x^3)$

$= \frac{x^3}{2} + o(x^3) \sim \frac{x^3}{2}$ per $x \to 0 \Rightarrow$

$\frac{N(x)}{D(x)} \sim \frac{x^3/2}{-x^3} = -1/2 =$ limite

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare l'integrale definito

$$I := \int_1^e \frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}}\, dx$$

int. per parti

Risoluzione

$I = \int_1^e \underbrace{x^{-1/3}}_{f'} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{g}\, dx = \underbrace{\frac{3}{2} x^{2/3}}_{f} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{g}\Big|_1^e - \int_1^e \underbrace{\frac{3}{2} x^{2/3}}_{f} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'}\, dx$, $\frac{3}{2}x^{2/3}\cdot\frac{1}{x} = x^{-1/3}$

$= \frac{3}{2}\left(e^{2/3}\cdot \underbrace{\ln(e)}_{=1} - 1^{2/3}\cdot\underbrace{\ln(1)}_{=0}\right) - \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2} x^{2/3}\Big|_1^e$

$= \frac{3}{2} e^{2/3} - \frac{9}{4}\left(e^{2/3} - 1\right)$

$= \frac{9}{4} - \frac{3}{4} e^{2/3}$

Esercizio 3

[3 punti]

Calcolare la derivata direzionale $D_v f(2,1)$ per $f(x,y) = 2xy - y^2$ e il versore $v = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$.

Risoluzione

$f_x(x,y) = 2y$, $f_y(x,y) = 2x - 2y$ $\Rightarrow$

f è C^1 $\Rightarrow$ f è differenziabile. Quindi si può

usare il teorema del gradiente: $Df(2,1) = (2\cdot 1, 2\cdot 2 - 2\cdot 1)$

$= (2,2)$

$\Rightarrow D_v f(2,1) = v \cdot Df(2,1) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)\cdot(2,2)$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 2 = \underline{\underline{\sqrt{3}+1}}$

Esercizio 4

[4 punti]

$=: f(x,y)$

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)\cdot(y-x)+\sin(x\cdot y^2)}{x^2+y^2}.$$

Risoluzione

Poniamo $y = mx$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x+mx)(mx-x) + \sin(x\cdot m^2 x^2)}{x^2 + m^2x^2} =$$

$$\lim_{x\to 0} \left[\frac{\cancel{x^2}\cdot(m^2-1)}{\cancel{x^2}\cdot(1+m^2)} + \frac{\sin(m^2\cdot x^3)}{(1+m^2)\cdot x^2} \right]$$

$$= \frac{m^2-1}{1+m^2} + \lim_{x\to 0} \frac{\sin(m^2\cdot x^3)}{(1+m^2)x^2} \quad \sin(m^2\cdot x^3) \sim m^2\cdot x^3$$

$$= \frac{m^2-1}{1+m^2} + \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{m^2\cdot x^3}{(1+m^2)x^2}}_{=0} = \frac{m^2-1}{m^2+1}$$

$\Rightarrow$ il limite dipende da m $\Rightarrow$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ $\underline{\text{non}}$ esiste.

Esercizio 5

[7 punti]

Trovare il dominio, eventuali zeri, asintoti, intervalli di monotonia e punti di estremo locale della funzione $f(x) = \dfrac{1-x^2}{e^x}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

Dominio: $e^x \neq 0 \ \forall x \Rightarrow$ dominio $= \mathbb{R}$

Zeri: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Asintoti: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \dfrac{-\infty}{0^+} = -\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-x^2}{e^x} \left(= \dfrac{-\infty}{+\infty}\right) \overset{(H)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x}{e^x} \left(= \dfrac{-\infty}{+\infty}\right) \overset{(H)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2}{e^x} = 0^-$

$y = 0$ è un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$

Derivata: $f'(x) = \dfrac{e^x(-2x) - e^x \cdot (1-x^2)}{(e^x)^2} = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{\underbrace{e^x}_{>0\ \forall x}} \Rightarrow$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = x_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{2^2 + 4\cdot 1}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$.

Segno di $f'(x)$ = segno di $(x^2 - 2x - 1)$ $\Rightarrow$

$1-\sqrt{2}$ $\quad$ $1+\sqrt{2}$

- f è crescente in $(-\infty, 1-\sqrt{2}) \cup (1+\sqrt{2}, +\infty)$
- f è decrescente in $(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$.

Segno di f: $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-1, 1]$

Simmetrie: Non ci sono

Grafico: