Istituzioni di Matematiche 1° Modulo $\boxed{6\,\text{CFU}}$ 1-A. Durata: 90 min. 27.6.16

Firma: ....

Cognome .... Nome .... A.A. ....

Matricola .... Corso di Laurea ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di $\sup A$ e $\max A$ per un insieme $A \subset \mathbb{R}$.

(ii) Calcolare, se esistono $\sup A$ e $\max A$ per $A = \{e^{\frac{n}{n+1}} : n \in \mathbb{N}\}$.

Risposta

(i)

cfr. appunti

(ii) • $\frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$ = crescente in n

• e^x è crescente

$\Rightarrow e^{\frac{n}{n+1}}$ è crescente $\Rightarrow \sup A = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{n}{n+1}} = e^1 \notin A$

$\Rightarrow \max A$ non esiste

Domanda 2

[4 punti]

(i) Dare la definizione del polinomio di Maclaurin $T_n(x)$ di ordine n di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Calcolare il polinomio di Maclaurin di ordine 4 della funzione $f(x) = x \cdot \cos(2x)$.

Risposta

(i)

cfr. appunti

$t = 2x \to 0$ per $x \to 0$

(ii) • $\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3)$ per $t \to 0$ $\Rightarrow$

$\cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + o((2x)^3) = 1 - 2x^2 + o(x^3)$ per $x \to 0$

$\Rightarrow x \cdot \cos(2x) = x(1-2x^2+o(x^3)) = \underbrace{x - 2x^3}_{= T_4(x)} + o(x^4)$ per $x \to 0$

Esercizio 1

[6 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\frac{\sin(x)}{x}}{x^2} = 1/6$$

Risoluzione

$$\frac{1-\frac{\sin(x)}{x}}{x^2} = \frac{x-\sin(x)}{x\cdot x^2}$$

$$= \frac{x-\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)}{x^3}$$

$$= \frac{\frac{1}{6}\cdot x^3 + o(x^3)}{x^3}$$

$$= 1/6 + \frac{o(x^3)}{x^3}$$

$$\to 1/6 \quad \text{per } x\to 0$$

Esercizio 2

[5 punti]

Trovare la retta tangente t nel punto $x_0 = e$ per la funzione $f(x) = \ln(\frac{1}{x})$. $= -\ln(x)$

Risoluzione

- $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)$
- $f(x_0) = \ln(\frac{1}{e}) = \ln(e^{-1}) = -1$
- $f'(x) = -\frac{1}{x} \Rightarrow f'(e) = -\frac{1}{e}$

Quindi $t(x) = -1 - \frac{1}{e}(x-e)$

Esercizio 3

[6 punti]

Calcolare l'integrale

$$\int_0^\pi \underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{g'} \, dx =: I$$

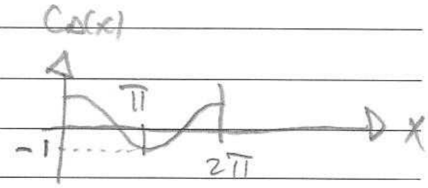
Risoluzione

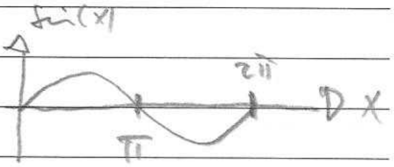
Usando int. per parti segue

$$I = \underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{(-\cos(x))}_{g}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{(-\cos(x))}_{g} \, dx$$

$$= -\pi \cdot \cos(\pi) + \int_0^{\pi} \cdot \cos(x) \, dx =$$

$$= \pi + \sin(x)\Big|_0^{\pi} = \pi.$$





Esercizio 4

[7 punti]

Trovare il dominio, eventuali simmetrie, zeri, intervalli di monotonia e punti di estremo locale della funzione $f(x) = x \cdot \ln\left|\frac{1}{x}\right|$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

cfr. compito da 9 CFU