Analisi Matematica (1) $\boxed{9\,\text{CFU}}$ Durata della prova: 2 ore 27.6.16

Firma: ....

Cognome .... Nome .... A.A. ....

Matricola .... Corso di Laurea ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di $\sup A$ e $\max A$ per un insieme $A \subset \mathbb{R}$.

(ii) Calcolare, se esistono $\sup A$ e $\max A$ per $A = \left\{e^{\frac{n}{n+1}} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

Risposta

(i)

cfr. compito

(ii)

chimica

Domanda 2

[4 punti]

(i) Dare la definizione del polinomio di Maclaurin $T_n(x)$ di ordine n di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Calcolare il polinomio di Maclaurin di ordine 4 della funzione $f(x) = x \cdot \cos(2x)$.

Risposta

(i)

cfr. compito chimica

(ii)

Esercizio 1

[4 punti]

$: a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} e^n \cdot (\sqrt[n]{\pi} - 1)^n$.

Risoluzione

Si applica il criterio della radice:

$$\sqrt[n]{a_n} = e \cdot (\sqrt[n]{\pi} - 1) \to e \cdot 0 = q < 1$$

$\Rightarrow$ La serie converge per il crit. della $\sqrt{\ }$.

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{x}{\sin(x)} - \frac{\sin(x)}{x}}{1 - \cos(x)} = 2/3$$

Risoluzione

- $$\frac{\frac{x}{\sin(x)} - \frac{\sin(x)}{x}}{1 - \cos(x)} = \frac{x^2 - \sin^2(x)}{x \cdot \sin(x) \cdot (1 - \cos(x))}$$

$$\sim \frac{x^2 - \sin^2(x)}{x \cdot x \cdot \frac{x^2}{2}} = 2 \cdot \frac{x^2 - \sin^2(x)}{x^4}$$

- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \Rightarrow$

$$\sin^2(x) = x^2 + \left(\frac{x^3}{6}\right)^2 + (o(x^3))^2 - 2x \cdot \frac{x^3}{6} + 2x \cdot o(x^3) - 2\frac{x^3}{6} \cdot o(x^3)$$

$$= x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4) \Rightarrow x^2 - \sin^2(x) = \frac{x^4}{3} + o(x^4) \sim \frac{x^4}{3} \text{ per } x \to$$

$$\Rightarrow 2\frac{x^2 - \sin^2(x)}{x^4} \sim 2 \cdot \frac{x^4/3}{x^4} = \frac{2}{3} = \text{limite}$$

Esercizio 3

[4 punti]

Trovare il piano tangente p nel punto $(x_0, y_0) = (1, e)$ per la funzione $f(x,y) = \ln(\frac{x}{y})$.

$= \ln(x) - \ln(y)$
(per $x, y > 0$)

Risoluzione

- $p(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$
- $f(x_0,y_0) = \ln(1) - \ln(e) = -1$
- $f_x(x,y) = \frac{1}{x} \Rightarrow f_x(x_0,y_0) = \frac{1}{1} = 1$
- $f_y(x,y) = -\frac{1}{y} \Rightarrow f_y(x_0,y_0) = -\frac{1}{e}$

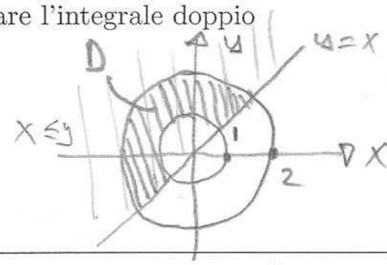
Quindi $p(x,y) = -1 + 1(x-1) - \frac{1}{e}(x-e)$

Esercizio 4

[5 punti]

Disegnare il dominio $D = \{(x,y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ x \leq y\}$ e calcolare l'integrale doppio

$$I := \iint_D \frac{x \cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy. = 0$$



Risoluzione

- D corrisponde a $D' = \underset{\rho}{[1,2]} \times \underset{\vartheta}{[\pi/4, \frac{5}{4}\pi]}$ in coord. polari

Quindi risulta

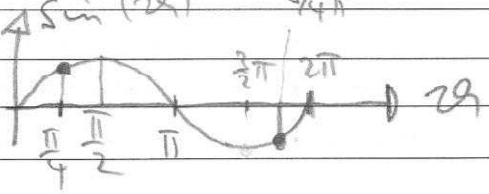
$$I = \int_1^2 \int_{\pi/4}^{\frac{5}{4}\pi} \frac{\rho\cdot\cos(\vartheta)\cdot\rho\cdot\sin(\vartheta)}{\cancel{\rho}} \cdot \cancel{\rho}\, d\vartheta\, d\rho$$

$$= \int_1^2 \rho^2\, d\rho \cdot \int_{\pi/4}^{\frac{5}{4}\pi} \overbrace{\sin(\vartheta)}^{f} \cdot \overbrace{\cos(\vartheta)}^{f'}\, d\vartheta = \frac{\rho^3}{3}\Big|_1^2 \cdot \underbrace{\left[\frac{\sin^2(\vartheta)}{2}\right]_{\pi/4}^{\frac{5}{4}\pi}}_{=\,0}$$

$\frac{f^2}{2}$

0 poiché $\sin^2(\pi/4) = \sin^2(\frac{5}{4}\pi)$

$= 0$



Esercizio 5

[6 punti]

Trovare il dominio, eventuali simmetrie, zeri, intervalli di monotonia e punti di estremo locale della funzione $f(x) = x \cdot \ln\left|\frac{1}{x}\right|$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

- dominio: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- simmetrie: $f(x)$ è <u>dispari</u> $\Rightarrow$ basta studiare

$f(x)$ per $x>0$ $\Rightarrow$ $f(x) = x \cdot \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -x \cdot \ln(x)$

<u>Sia $x>0$:</u>

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$, $f(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$
- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln(x) = 0$
- $f'(x) = -\left(1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}\right) = -(\ln(x) + 1)$

$> 0 \Leftrightarrow \ln(x) + 1 < 0 \Leftrightarrow \ln(x) < -1 \Leftrightarrow x < e^{-1} = \frac{1}{e}$

$\Leftrightarrow$ $f(x)$ è strett. crescente

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

Inoltre in $x_0 = \frac{1}{e}$ la derivata $f'(x)$ cambia segno da a $\Rightarrow$ $x_0 = 1/e$ è un pto. di locale.

<u>Grafico</u>