Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore 27.6.18

Firma: ....................

**Cognome** .............................. **Nome** .................................. **A.A.** ..........

**Matricola** .................................. **Corso di Laurea** ..................

| | |
|---|---|
| D1 | |
| D2 | |
| E1 | |
| E2 | |
| E3 | |
| E4 | |
| E5 | |
| $\Sigma$ | |

## Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di somma parziale (o ridotta) $n$-esima di una serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$

(ii) Se $\sum_{k=0}^{+\infty} e^{a_k}$ converge, allora la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$

$\boxed{a}$ converge $\boxed{b}$ diverge a $+\infty$ $\boxed{c}$ è irregolare $\boxed{d}$ diverge a $-\infty$

(Giustificare la risposta.)

### Risposta

(i) $S_n := a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n, \ n \in \mathbb{N}.$

(ii) $\sum_{k=0}^{+\infty} e^{a_k}$ converge $\Rightarrow e^{a_k} \to 0$ per $k \to +\infty$

$\Rightarrow a_k = \ln(e^{a_k}) \to \ln(0) = -\infty$ per $k \to +\infty$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = -\infty$

## Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema degli zeri.

(ii) Verificare che la funzione $f(x) = \ln\left(\frac{x+e}{e^x}\right)$ ammette uno zero nell'intervallo $[0, e]$.

### Risposta

(i) $\to$ appunti

(ii) • $f : [0,e]$ è continua

• $f(0) = \ln\left(\frac{0+e}{e^0}\right) = \ln(e) = 1 > 0$

• $f(e) = \ln\left(\frac{e+e}{e^e}\right) = \ln\left(\frac{2e}{e^e}\right) < \ln\left(\frac{e^2}{e^e}\right) = \ln(e^{2-e}) = 2-e < 0$

$\xRightarrow{\text{teor. degli zeri}} \exists\, c \in [0,e]$ con $f(c) = 0$

[ ln è strett. crescente e $2 < e$ ]

## Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\ell := \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos(x) - \ln(1+x)}{\underbrace{x \cdot \underbrace{\sin(x)}_{\sim x}}_{\sim x^2 \text{ per } x\to 0}}$$

**Risoluzione**

$$\ell = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos(x) - \ln(1+x)}{x^2} \quad \left(= \frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + \sin(x) - \frac{1}{1+x}}{2x} \quad \left(= \frac{0}{0}\right) \qquad \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + \cos(x) + (1+x)^{-2}}{2} = \frac{e^0 + \cos(0) + (1+0)^{-2}}{2}$$

$$= \frac{1+1+1}{2} = \frac{3}{2}$$

## Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare l'integrale definito

$$I := \int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$$

**Risoluzione**

Sost. $\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow$ • $\frac{dx}{dt} = 2t \Rightarrow dx = 2t\,dt$

• $x = 0 \Rightarrow t = \sqrt{0} = 0$

$x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{1} = 1$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \frac{2t\,dt}{1+t} = 2 \cdot \int_0^1 \frac{t+1-1}{t+1}\,dt$$

$$= 2 \cdot \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = 2\left[t - \ln(t+1)\right]_0^1$$

$$= 2\left[1 - \ln(2) - \underbrace{0 + \ln(1)}_{=0}\right] = 2 \cdot (1 - \ln(2))$$

## Esercizio 3

[4 punti]

Calcolare la derivata direzionale $D_v f(1,2)$ per $f(x,y) = y^2 - 3xy$ e il versore $v = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$.

### Risoluzione

• $D_v f(1,2) = f_x(1,2) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - f_y(1,2) \cdot \frac{1}{2}$

• $f_x(x,y) = -3y \Rightarrow f_x(1,2) = -3 \cdot 2 = -6$

• $f_y(x,y) = 2y - 3x \Rightarrow f_y(1,2) = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1$

$\Rightarrow D_v f(1,2) = -6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{-3 \cdot \sqrt{3} - \frac{1}{2}}}$

## Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\overbrace{x^2 - \overbrace{(x+y)\cdot(x-y)}^{=x^2-y^2}}^{=x^2-x^2+y^2=y^2}}{x^2+y^2}.$$

### Risoluzione

Poniamo $y = mx \Rightarrow$

$\lim_{x\to 0} \frac{m^2 \cdot x^2}{x^2 + m x^2} = \frac{m^2}{1+m^2}$ dipende da $m \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \lim_{(x,y)} \frac{y^2}{x^2+y^2}$ non esiste

## Esercizio 5

**[6 punti]**

Trovare il dominio, eventuali zeri, asintoti, intervalli di monotonia e punti di estremo locale della funzione $f(x) = \dfrac{(x-1)\cdot(x+2)}{x-3}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

**Risoluzione**

• dominio: $\mathbb{R}\setminus\{3\} = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

• $f(x) = 0 \iff x = 1$ oppure $x = -2$

• $f(x) = \underbrace{\dfrac{x-1}{x-3}}_{\to 1} \cdot \overbrace{(x+2)}^{\to \pm\infty}$ per $x \to \pm\infty \Rightarrow$ possibili asintoti obliqui ⊛

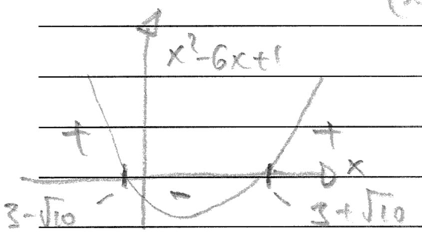
$f(x) \to \dfrac{(3-1)\cdot(3+2)}{0^{+/-}} = \dfrac{10}{0^{+/-}} = \pm\infty$ per $x \to 3^{+/-}$

$\Rightarrow x = 3$ asintoto verticale.

• $f'(x) = \left(\dfrac{x^2+x-2}{x-3}\right)' = \dfrac{(x-3)(2x+1)-(x^2+x-2)\cdot 1}{(x-3)^2}$

$= \dfrac{2x^2-6x+x-3-x^2-x+2}{(x-3)^2} = \dfrac{x^2-6x-1}{\underbrace{(x-3)^2}_{>0}} = 0 \iff$

$x = x_{1/2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36+4}}{2} = 3 \pm \sqrt{10}$




$\Rightarrow$ • $f$ è crescente in $(-\infty, 3-\sqrt{10}) \cup (3+\sqrt{10}, +\infty)$

• $f$ è decrescente in $(3-\sqrt{10}, 3+\sqrt{10})$

$\Rightarrow x_0 = 3-\sqrt{10}$ è un pto di max locale

$x_1 = 3+\sqrt{10}$ è —"— min —"—

• asintoti obliqui: • $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \underbrace{\dfrac{x-1}{x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\dfrac{x+2}{x-3}}_{\to 1} = 1 \cdot 1 = 1 =: m$

• $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\dfrac{(x-1)(x+2)}{x-3} - x\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{(x-1)(x+2) - x\cdot(x-3)}{x-3}$

$= \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{4x-2}{x-3} = 4 =: q.$

$\Rightarrow y = x+4$ è un asintoto obliquo di $f$.

Grafico: