Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore 27.6.18

Firma: ....

Cognome .... **Nome** .... **A.A.** ....

Matricola .... **Corso di Laurea** ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di derivabilità in $x_0 \in \mathbb{R}$ per una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Dire se $f(x) = x \cdot |x|$ è derivabile in $x_0 = 0$ giustificando la risposta.

Risposta

(i) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 \in \mathbb{R}$ se converge

il limite $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0) \in \mathbb{R}$

(ii) In questo caso risulta

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot |x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} |x| = 0$

Quindi f è derivabile in $x_0 = 0$ con $f'(0) = 0$.

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema degli zeri.

(ii) Verificare che l'equazione $e^{-x} = \ln(x)$ ammette una soluzione $x \in [1, e]$.

Risposta

(i) Sia $f \in C[a,b]$. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora

$\exists\, c \in (a,b)$ t.c. $f(c) = 0$.

(ii) Poniamo $f: [1,e] \to \mathbb{R}$, $f(x) := e^{-x} - \ln(x)$.

Allora, $f \in C[1,e]$ e

$f(1) = e^{-1} - \ln(1) = \frac{1}{e} > 0$ $\Big\} \Rightarrow f(1) \cdot f(e) < 0 \Rightarrow$

$f(e) = \underbrace{e^{-e}}_{<1} - \underbrace{\ln(e)}_{=1} < 0$ $\Big\}$ $\exists\, c \in (1,e)$ con $f(c) = 0 \Leftrightarrow e^{-c} = \ln(c)$

Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sin(x) - \cosh(x)}{x \cdot \big(1 - \cos(x)\big)} =: \ell$$

Risoluzione

- $1-\cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$ per $x \to 0 \Rightarrow x \cdot (1-\cos(x)) \sim \frac{x^3}{2}$ per $x \to 0$
- Uso Taylor: numeratore da sviluppare fino al 3° ordine

$e^x - \sin(x) - \cosh(x) = \cancel{1} + \cancel{x} + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{6} - \cancel{x} + \frac{x^3}{6} - \cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + o(x^3)$

$= \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = \frac{x^3}{3} + o(x^3) \sim \frac{x^3}{3}$ per $x \to 0$

- $\ell = \lim_{x \to 0} \frac{1\cancel{x^3}/3}{1\cancel{x^3}/2} = \frac{1/3}{1/2} = 2/3$

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare, se converge, l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{1+6x}{2\sqrt{x}}\, dx =: I$$

Risoluzione

$I = \lim_{a \to 0} \int_a^1 \left(\frac{1}{2} \cdot x^{-1/2} + 3 \cdot x^{1/2}\right) dx$

$= \lim_{a \to 0} \left[x^{1/2} + 3 \cdot x^{3/2} \cdot \frac{2}{3} \right]_a^1$

$= \lim_{a \to 0} \left[\underbrace{1^{1/2}}_{=1} - \underbrace{a^{1/2}}_{\downarrow 0} + 2 \cdot \big(\underbrace{1^{3/2}}_{=1} - \underbrace{a^{3/2}}_{\downarrow 0}\big) \right] = 1 + 2 = 3$

per $a \to 0$

Esercizio 3

[4 punti]

Calcolare la derivata direzionale $D_v f(2,-1)$ per $f(x,y) = x \cdot y^2$ e il versore $v = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. $=: (v_x, v_y)$

Risoluzione

• $f_x(x,y) = y^2$, $f_y(x,y) = 2xy$ $\Rightarrow$ f è differenziabile

• Per il teorema del gradiente segue

$$D_v f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0) \cdot v_x + f_y(x_0,y_0) \cdot v_y$$

$$= (-1)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + (2 \cdot \cancel{2} \cdot (-1)) \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}$$

$$= \underline{-\frac{1}{2} - 2 \cdot \sqrt{3}}$$

Esercizio 4

[4 punti]

Studiare la continuità e differenziabilità in $(x_0, y_0) = (0,0)$ della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x \cdot |y|}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Risoluzione

Poniamo $y = x$. Allora

$$\lim_{x \to 0} f(x,x) = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot |x|}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

non esiste.

$\Rightarrow$ • f <u>non</u> è continua in $(0,0)$

$\Rightarrow$ • f <u>non</u> è differenziabile in $(0,0)$

Esercizio 5

[6 punti]

Trovare il dominio, eventuali zeri, asintoti e punti di estremo locale della funzione $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x - 5}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

• dominio: $D = \mathbb{R} \setminus \{5\} = (-\infty, 5) \cup (5, +\infty)$

• zeri: $f(x) = 0 \iff x^2 = 16 \iff x = \pm 4$

• asintoti: $\lim_{x \to 5^\pm} f(x) = \frac{25-16}{0^\pm} = \frac{9}{0^\pm} = \pm\infty$

quindi $x = 5$ è un asintoto verticale.

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2-16}{x^2-5x} = 1 =: m$

$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2-16}{x-5} - x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2-16-x^2+5x}{x-5}$

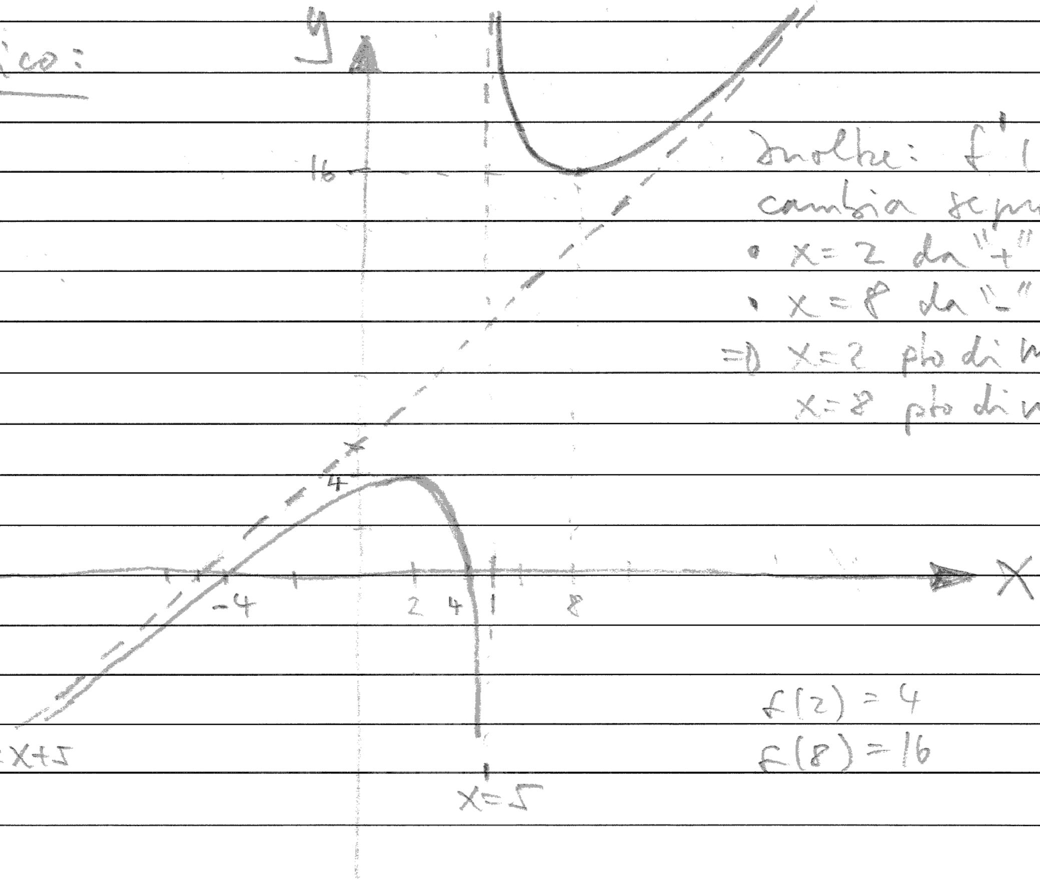
$= 5 =: q$

$\Rightarrow y = x+5$ è un asintoto obliquo.

• $f'(x) = \frac{(x-5)\cdot 2x - 1\cdot(x^2-16)}{(x-5)^2} = \frac{2x^2-10x-x^2+16}{(x-5)^2} = \frac{x^2-10x+16}{(x-5)^2}$ > 0

$\overset{!}{=} 0 \iff x^2-10x+16=0 \iff x = \frac{10 \pm \sqrt{100-4\cdot16}}{2} = \begin{cases} 8 \\ 2 \end{cases}$

Grafico:



Inoltre: $f'(x)$ cambia segno in

• $x=2$ da "+" a "−"

• $x=8$ da "−" a "+"

$\Rightarrow$ $x=2$ pto di max loc.

$x=8$ pto di min loc.

$f(2) = 4$

$f(8) = 16$