Cognome .... **Nome** ....

Matricola .... **Corso di Laurea** ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

(ii) Determinare una primitiva della funzione $f(x) = e^{(x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$.

Risposta

(i) Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, allora $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definita come $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ è derivabile con $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$.

(ii) Per esempio per (i) $F(x) := \int_0^x e^{t^2}\,dt$, $x \in \mathbb{R}$ è una primitiva di f.

Domanda 2

[4 punti]

(i) Dare la definizione di continuità di una funzione $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ nel punto $x_0 \in (a,b)$.

(ii) Trovare $\alpha > 0$ tale che la funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{\ln(1-\alpha x)} & \text{se } x < 0 \\ 2\cos(x) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ risulta continua in $x_0 = 0$.

Risposta

(i) f è continua in x_0 se $\forall$ successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (a,b)$ con $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$ segue che $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$

(ii) • f è continua in $x_0 = 0 \iff \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

• $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{\overbrace{\sin(x)}^{\sim x}}{\underbrace{\ln(1-\alpha x)}_{\sim -\alpha\cdot x}} = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{\cancel{x}^{\,1}}{-\alpha\cdot\cancel{x}_{\,1}} = -\dfrac{1}{\alpha}$

• $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 2\cdot\cos(x) = 2\cdot\cos(0) = 2 = f(0)$

$\Rightarrow f$ è continua in $x_0 = 0 \iff -\dfrac{1}{\alpha} = 2 \iff \underline{\underline{\alpha = -\dfrac{1}{2}}}$.

Esercizio 1

[4 punti]

Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \overbrace{\left(\frac{2n^2+3n+4}{5n^2+6n+7}\right)^{8n}}^{=:\, a_n} =: S$$

Risoluzione

- La serie S è a termini positivi
- Applicando il criterio della radice segue

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{2n^2+3n+4}{5n^2+6n+7}\right)^8 \to \left(\frac{2}{5}\right)^8 = q < 1 \quad \text{per } n \to +\infty$$

$\Rightarrow$ La serie S converge.

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)\cdot\cos(x) - x}{x^3} =: \ell$$

Risoluzione

Usando Taylor il numeratore è da sviluppare fino al 3° ordine:

- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ per $x \to 0$
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ — " —

$$\Rightarrow \sin(x)\cdot\cos(x) - x = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\cdot\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) - x$$

$$= \cancel{x} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{2} + o(x^3) \cancel{-x}$$

$$= \underbrace{\left(-\frac{1}{6} - \frac{3}{6}\right)}_{= -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}} \cdot x^3 + o(x^3) \sim -\frac{2}{3}\cdot x^3 \quad \text{per } x \to 0$$

$$\Rightarrow \ell = \lim_{x\to 0} \frac{-2/3 \cdot x^3}{x^3} = -\frac{2}{3}$$

Esercizio 3

[5 punti]

Trovare gli estremi locali e intervalli di monotonia della funzione $f(x) = x \cdot e^{(2x^2 - 5x + 1)}$ per $x \in \mathbb{R}$.

Risoluzione

- f è derivabile su tutto $\mathbb{R}$, quindi
  f è crescente $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0$
  f è decrescente $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0$.

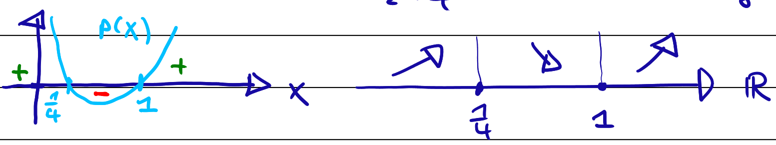
- $f'(x) = 1 \cdot e^{2x^2-5x+1} + x \cdot e^{2x^2-5x+1} \cdot (4x-5)$

  $= \underbrace{(4x^2 - 5x + 1)}_{=:\, p(x)} \cdot \underbrace{e^{2x^2-5x+1}}_{>0 \ \forall x \in \mathbb{R}}$

Quindi $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow p(x) \geq 0$ e $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow p(x) \leq 0$.

- $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = \dfrac{5 \pm 3}{8} = \begin{cases} \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \\ \frac{8}{8} = 1 \end{cases}$

Grafico di p:



Quindi: f è decrescente in $[\frac{1}{4}, 1]$ e crescente in $(-\infty, \frac{1}{4}] \cup [1, +\infty)$,
$x_1 = \frac{1}{4}$ è un pto di massimo loc. $x_2 = 1$ —"— minimo locale.

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare l'equazione del piano tangente $p(x, y)$ al grafico della funzione $f(x, y) = \dfrac{5xy}{1 + x^2}$ nel punto $(x_0, y_0) = (2, -1)$.

Risoluzione

- $p(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x,y) \cdot (y - y_0)$

- $f(x_0,y_0) = \dfrac{5 \cdot 2 \cdot (-1)}{1 + 2^2} = \dfrac{-10}{5} = -2$

- $f_x(x,y) = \dfrac{(1+x^2) \cdot 5y - 2x \cdot 5xy}{(1+x^2)^2}$

  $\Rightarrow f_x(x_0,y_0) = \dfrac{(1+2^2) \cdot 5 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot (-1)}{(1+2^2)^2} = \dfrac{-25+40}{5^2} = \dfrac{\cancel{15}^{\,3}}{5^{\cancel{2}}} = \dfrac{3}{5}$

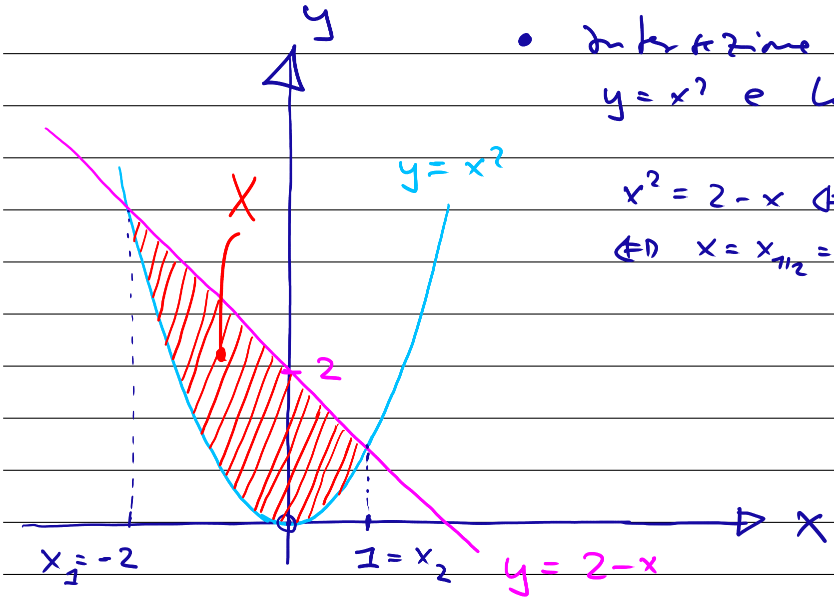
- $f_y(x,y) = \dfrac{5x}{1+x^2} \Rightarrow f_y(x_0,y_0) = \dfrac{5 \cdot 2}{1 + 2^2} = \dfrac{10}{5} = 2$

$\Rightarrow$ $\boxed{p(x,y) = -2 + \frac{3}{5}(x-2) + 2 \cdot (y+1)}$

Esercizio 5 **[6 punti]**

Disegnare l'insieme $X = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2 \le y \le 2-x\}$ e calcolare la sua misura $|X|$.

Risoluzione



• Intersezione tra la parabola $y = x^2$ e la retta $y = 2-x$:

$$x^2 = 2-x \iff x^2+x-2 = 0$$

$$\iff x = x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2+4\cdot 2}}{2} = \frac{-1\pm 3}{2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow X = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[-2,1],\ x^2 \le y \le 2-x\}$$

è y-semplice

• $$|X| = \iint_X 1\,dx\,dy$$

$$\overset{\text{Fubini-Tonelli}}{=} \int_{x=-2}^{1}\int_{y=x^2}^{2-x} 1\,dy\,dx = \int_{x=-2}^{1} y\Big|_{y=x^2}^{2-x}\,dx$$

$$= \int_{-2}^{1} (2-x-x^2)\,dx = \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{1}$$

$$= 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \left(2\cdot(-2) - \frac{(-2)^2}{2} - \frac{(-2)^3}{3}\right)$$

$$= 2 - \frac{3}{6} - \frac{2}{6} + 4 + 2 - \frac{8}{3}$$

$$= 8 - \frac{5+16}{6} = \frac{48-21}{6} = \frac{27}{6} = \underline{\underline{\frac{9}{2}}}$$