Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore **27.7.15**

Firma: ....

Cognome .... **Nome** .... **A.A.** ....

Matricola .... **Corso di Laurea** ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Se $A \subset \mathbb{R}$, dare la definizione di $\sup A$ e $\max A$.

(ii) Se $A = \{\frac{n-4}{n+9} : n \in \mathbb{N}\}$, calcolare, se esistono, $\sup A$ e $\max A$.

Risposta

(i) cfr. appunti

(ii) $\underbrace{\frac{n-4}{n+9}}_{=: a_n} = \frac{n+9-13}{n+9} = 1 - \frac{13}{n+9}$ crescente $\Rightarrow$ crescente

$\Rightarrow \sup A = \lim_{n \to +\infty} a_n = 1$, $a_n \neq 1 \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\max A$ non esiste.

Domanda 2

[4 punti]

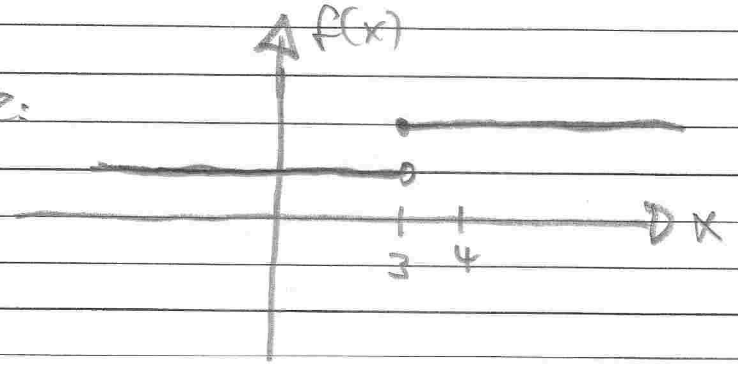
(i) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, dare la definizione di funzione f continua in x_0.

(ii) Disegnare il grafico di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che è continua in 4 e discontinua in 3.

Risposta

(i) cfr. appunti

(ii) p.e.



Esercizio 1

[4 punti]

Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to 3} \frac{(x-3)^5 \cdot \ln[(x-2)^7]}{1-\cos[(x-3)^5]} =: \ell$$

Risoluzione

Poniamo $t := x-3 \Rightarrow \ell = \lim_{t\to 0} \frac{t^5 \cdot \ln[(1+t)^7]}{1-\cos[t^5]}$

Allora $\frac{t^5 \cdot \ln[(1+t)^7]}{1-\cos(t^5)} \overset{(*)}{\sim} \frac{t^5 \cdot 7\ln(1+t)}{\frac{t^{10}}{2}}$

$\sim \frac{2\cdot 7\cdot t^6}{t^{10}} = 14 \cdot \frac{1}{t^4} \to +\infty$ per $t\to 0$

$\Rightarrow \ell = +\infty$.

(*) • $1-\cos(t) \sim t^2/2$ per $t\to 0$
• $\ln(1+t) \sim t$ — " —
• $\ln(r^7) = 7\cdot \ln(r)$ $\forall r>0$.

Esercizio 2

[4 punti]

Studiare il comportamento della serie

$$S := \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1}{1+\sqrt{n}}\right)^2 =: a_n$$

Risoluzione

• $e^x - 1 \sim x$ per $x\to 0 \Rightarrow e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ per $n\to+\infty$ ($x = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ per $n\to+\infty$)

• $1+\sqrt{n} \sim \sqrt{n}$ per $n\to+\infty$

$\Rightarrow$ (per il principio di sostituzione)

$a_n \sim \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}\right)^2 = \frac{1}{n^2}$. Inoltre la serie

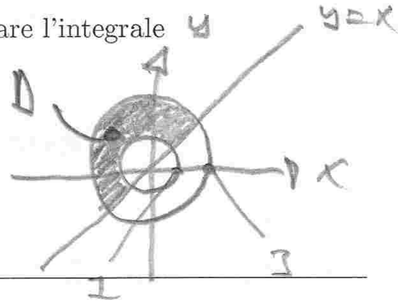
$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge $\Rightarrow S$ converge.

Esercizio 3

[5 punti]

Disegnare l'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 9,\ x \leq y\}$ e calcolare l'integrale

$$I := \iint_D \frac{3\,xy^2}{x^2+y^2}\,dxdy.$$



Risoluzione

D corrisponde a $D' = [1,3] \times [\pi/4, 5/4\pi]$ in coord. polari.
$$\underset{\rho}{\Psi}\qquad \underset{\vartheta}{\Psi}$$

Quindi: $I = \displaystyle\int_1^3 \int_{\pi/4}^{5/4\pi} \frac{3\cdot\rho\cdot\cos(\vartheta)\cdot\rho^2\cdot\sin^2(\vartheta)\cdot\rho}{\rho^2}\,d\vartheta\, d\rho$

$= \displaystyle\int_1^3 3\cdot\rho^2 d\rho \cdot \int_{\pi/4}^{5/4\pi} \sin^2(\vartheta)\cdot\cos(\vartheta)\,d\vartheta$

$= \rho^3\Big|_1^3 \cdot \dfrac{\sin^3(\vartheta)}{3}\Big|_{\pi/4}^{5/4\pi} = \dfrac{(27-1)}{3}\cdot\left[\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\right]$

$\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2,\ \sin(5/4\pi) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$= \underline{\underline{\dfrac{-26}{3}\sqrt{2}}}$

Esercizio 4

[5 punti]

Calcolare la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0)$ per $f(x,y) = \frac{x^2y-1}{x}$, $(x_0,y_0) = (\frac{1}{3},2)$ e $v = \frac{1}{5}(-3,4)$.

Risoluzione

$f(x,y) = x\cdot y - \dfrac{1}{x} \Rightarrow \bullet\ f_x(x,y) = y + \dfrac{1}{x^2}$

$\Rightarrow f_x(x_0,y_0) = 2 + (3)^2 = 11$

$\bullet\ f_y(x,y) = x \Rightarrow f_y(x_0,y_0) = \dfrac{1}{3}.$

Quindi per il teor. del gradiente segue:

$f_v(x_0,y_0) = (11, 1/3)\cdot\dfrac{1}{5}(-3,4) = \dfrac{-11\cdot 3 + 4/3}{5}$

$= \underline{\underline{-\dfrac{19}{3}}}$

Esercizio 5

[6 punti]

Trovare il dominio, zeri, eventuali asintoti, intervalli di monotonia e punti di estremo locale della funzione

$$f(x) = \ln\left(x + \frac{1}{4x}\right)$$

e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

sempre >0

• dominio: $x+\frac{1}{4x}>0 \iff \frac{4x^2+1}{4x}>0 \iff 4x>0$
$\iff x>0.$

$[\ln(t)=0 \iff t=1]$

Quindi: dominio di $f = (0,+\infty)$

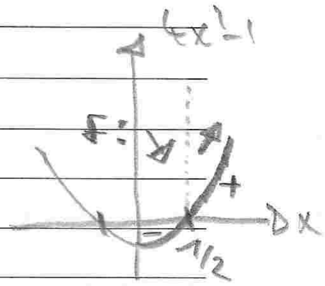
• zeri: $f(x)=0 \iff x+\frac{1}{4x}=1 \iff 4x^2-4x+1=0 \iff x=\frac{1}{2}.$
$\iff x=1/2$

Quindi $x_0 = 1/2$ è l'unico zero di f.

• $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \ln\left(0^+ + \frac{1}{0^+}\right) = \ln(+\infty) = +\infty$

• $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \ln\left(+\infty + \frac{1}{+\infty}\right) = \ln(+\infty) = +\infty$

• $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \Rightarrow$ non $\exists$ asint. obl.



• $f'(x) = \frac{1}{x+\frac{1}{4x}}\cdot\left(1-\frac{1}{4x^2}\right) = \frac{4x^2-1}{4x^3+x}$ $\quad 4x^3+x>0 \quad \forall x>0$

$\Rightarrow f$ è decrescente in $(0,1/2)$ e crescente in $(1/2,+\infty)$

$\Rightarrow x_1 = 1/2$ è un pto. di minimo locale