Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore **28.1.13**

Firma: ....

Cognome .... **Nome** .... **A.A.** ....

Matricola .... **Corso di Laurea** .... **Canale** A B C D

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[3 punti]

(i) Dare la definizione di differenziabilità per $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in un punto (x_0, y_0).

(ii) Dire se $f(x, y) = e^{xy}\sqrt{x}$ è differenziabile in $(1, 0)$, giustificando la risposta.

Risposta

(i) Vedi Disp.

f è continua in un intorno di $(1,0)$

(ii) $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{xy} y \sqrt{x} + e^{xy}\frac{1}{2\sqrt{x}}$ continua in un intorno di $(1,0)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{xy} x \sqrt{x}$ " "

Dunque $f \in C^1(U_{(1,0)}) \Rightarrow f$ diff. in $(1,0)$

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema di Weierstraß.

(ii) Sia $f : [0, 5] \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+2x}}$. Allora risulta che

a f non ammette minimo in $[0, 5]$

b il massimo di f è $\frac{5}{\sqrt{11}}$

c il massimo di f è $\frac{2}{\sqrt{13}}$

d f non ammette massimo

Risposta

(i) Vedi Disp / libro

(ii) f è continua in $[0,5]$, dunque vale il T. di W.

quindi a e d sono false

$f'(x) = \frac{\sqrt{1+2x} - \frac{x}{\sqrt{1+2x}}}{(1+2x)} = \frac{1+2x-x}{(1+2x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1+x}{(1+2x)^{\frac{3}{2}}} > 0 \; \forall x \in [0,5]$

dunque $\max f(x) = f(5) = \frac{5}{\sqrt{11}}$

Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$L = \lim_{x\to 2^+} \frac{\left(\sqrt{x-2}\right)^3 \cdot \ln((x-1)^2)}{(x^2-4)^{\frac{5}{2}}}$$

Risoluzione

Il limite risulta della forma $\frac{0}{0}$

$\ln(x-1)^2 = 2\ln(1+(x-2)) = 2(x-2) + o((x-2))$ per $x \to 2^+$

$$L = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)^{\frac{3}{2}} \cdot 2(x-2) + o\left((x-2)^{\frac{5}{2}}\right)}{(x-2)^{\frac{5}{2}}\underbrace{(x+2)^{\frac{5}{2}}}_{\to 2^5}} =$$

$$= \frac{1}{2^4} \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)^{\frac{5}{2}}}{(x-2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{16}$$

Esercizio 2

[5 punti]

Studiare la convergenza della seguente serie

$$(\alpha) \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-\cos(n^{-\frac{1}{5}})}{\sqrt{n}}$$

Risoluzione

$1 - \cos\frac{1}{\sqrt[5]{n}} \sim \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt[5]{n^2}} \qquad n \to +\infty$

$\left(1-\cos\left(\frac{1}{\sqrt[5]{n}}\right)\right)\frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{2}\frac{1}{n^{\frac{2}{5}+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\frac{1}{n^{\frac{9}{10}}} \qquad n \to +\infty$

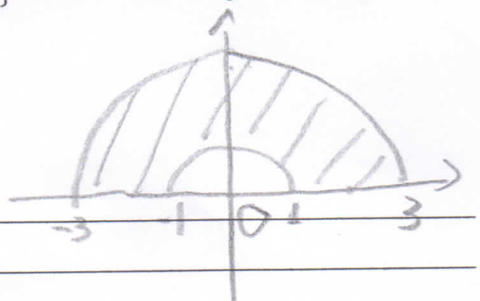
dunque $(\alpha) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{n^{\frac{9}{10}}}$, che diverge

Esercizio 3

[4 punti]

Disegnare il dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9,\ y \geq 0\}$ e calcolare l'integrale doppio

$$I = \iint_D \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}\, dx\, dy$$



Risoluzione

passiamo a coordinate polari

$$I = \int_1^3 \int_0^\pi \frac{\rho^{\cancel{3}} \cos^2\varphi \sin\varphi}{\cancel{\rho^2}}\, \rho\, d\rho\, d\varphi =$$

$$= \left(\int_1^3 \rho^2\, d\rho\right)\left(\int_0^\pi \cos^2\varphi \sin\varphi\, d\varphi\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left[\rho^3\right]_1^3 \left[-\frac{1}{3}\cos^3\varphi\right]_0^\pi = \frac{1}{3}(27-1)\left(-\frac{1}{3}\right)(-1-1)$$

$$= \frac{26 \cdot 2}{9} = \frac{52}{9}$$

Esercizio 4

[3 punti]

Data la funzione $f(x, y) = \left(\frac{x-2}{y+\ln x}\right)^5$, calcolare f_x e di f_y.

Risoluzione

$$f_x = 5\left(\frac{x-2}{y+\ln x}\right)^4 \frac{y + \ln x - (x-2)\frac{1}{x}}{(y+\ln x)^2}$$

$$= 5\left(\frac{x-2}{y+\ln x}\right)^4 \frac{yx + x\ln x - x + 2}{x(y+\ln x)^2}$$

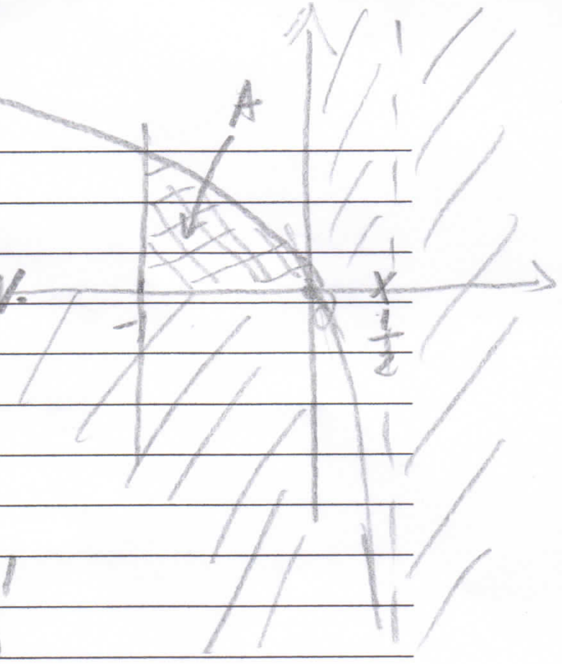
$$f_y = 5\left(\frac{x-2}{y+\ln x}\right)^4 (x-2)(-1)\frac{1}{(y+\ln x)^2}$$

$$= -5\, \frac{(x-2)^5}{(y+\ln x)^6}$$

Esercizio 5 **[8 punti]**

Trovare il dominio, eventuali simmetrie, zeri, punti di estremo locale ed asintoti della funzione $f(x) = \ln(\sqrt{1-2x})$ e tracciarne un grafico approssimativo. Calcolare inoltre l'area della regione compresa tra il grafico di f, l'asse x e le rette $x=-1$ e $x=0$.

Risoluzione



$D_f = \{1-2x>0\} = (-\infty, \frac{1}{2})$

$f(0)=0$

$\lim_{x\to \frac{1}{2}^-} f(x) = -\infty$ $\quad x=\frac{1}{2}$ asintoto v.

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$

$f(x)\geq 0$ $\quad \sqrt{1-2x}\geq 1$, $\quad 1-2x\geq 1$, $\quad x\leq 0$

asintoto? no

$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(\sqrt{1-2x})}{x} =$

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}\frac{\ln(1-2x)}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}\frac{\frac{-2}{1-2x}}{1} = 0$

$f(x) = \frac{1}{2}\ln(1-2x)$

$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{1-2x}(-2) = -\frac{1}{1-2x} < 0 \quad \forall x\in D_f$

Area (Superficie di A) $= \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}\ln(1-2x)\,dx =$

$= \frac{1}{2}\left\{\left[x\ln(1-2x)\right]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0}\frac{2x-1+1}{1-2x}dx\right\} =$

$= \frac{1}{2}\left(\ln 3 - \int_{-1}^{0}dx + \int_{-1}^{0}\frac{1}{1-2x}dx\right) =$

$= \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}t\Big]_{-1}^{0} - \frac{1}{4}\int_{-1}^{0}\frac{-2}{1-2x}dx =$

$= \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\ln(1-2x)\Big]_{-1}^{0} = \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\ln 3 = \frac{3}{4}\ln 3 - \frac{1}{2}$