Analisi Matematica 1, Scritto 2-B. Durata della prova: 2 ore **28.1.13**

Firma: ....

Cognome.......................... **Nome**.............................. **A.A.**.........

Matricola.......................... **Corso di Laurea**...................... **Canale** A B C D

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[3 punti]

(i) Dare la definizione di estremo inferiore e minimo di un insieme $A \subset \mathbb{R}$.

(ii) Dato $A = \{x \in \mathbb{R} : e^{x-3} \geq 2\}$, determinare $\inf A$ ed eventualmente $\min A$.

Risposta

(i) Dispense / libro

(ii) $e^{x-3} \geq 2$; $x-3 \geq \ln 2$; $x \geq 3+\ln 2$

$\inf A = \min A = 3+\ln 2$

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema di Lagrange o del valor medio.

(ii) Data $f : [1, 10] \to \mathbb{R}$ con $f(x) = e^{-x}$ il punto c di Lagrange di f è dato da

a $c = \ln\sqrt{\dfrac{e^{-10}-e^{-1}}{9}}$ ~~b~~ $c = -\ln\left(\dfrac{e^{-1}-e^{-10}}{9}\right)$

c $c = 2\ln\left(\dfrac{e^{-1}-e^{-10}}{9}\right)$ d non si può applicare il teorema di Lagrange

Risposta

(i) Dispense / libro

(ii) $\exists c \,/\, \dfrac{f(10)-f(1)}{9} = -e^{-c}$; $\dfrac{e^{-10}-e^{-1}}{9} = -e^{-c}$;

$\dfrac{\frac{1}{e}-\frac{1}{e^{10}}}{9} = e^{-c}$; $-c = \ln\left(\dfrac{\frac{1}{e}-\frac{1}{e^{10}}}{9}\right)$

$c = -\ln\left(\dfrac{\frac{1}{e}-\frac{1}{e^{10}}}{9}\right)$

Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite seguente

$$I = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2+3}\right)^{n^2}$$

Risoluzione

$$\left[\left(\frac{n^2+3}{n^2+3} - \frac{2}{n^2+3}\right)^{n^2+3}\right]^{\frac{n^2}{n^2+3}} =$$

$$= \left[\underbrace{\left(1 - \frac{2}{n^2+3}\right)^{n^2+3}}_{\to e^{-2}}\right]^{\frac{n^2}{n^2+3} \to 1}$$

$$I = e^{-2}$$

Esercizio 2

[5 punti]

Studiare la continuità in $\mathbb{R}$ della seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2}-1}{\ln(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} & \text{se } x > 0, \\ \dfrac{2x^2+x^3}{(x-1)^2} & \text{se } x \le 0. \end{cases}$$

Risoluzione

f è continua in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2}-1}{x^2} \frac{x^2}{\frac{1}{2}(x^2+o(x^2))} = 2$$

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{2x^2+x^3}{(x-1)^2} = 0$$

discontinuità di tipo salto

Esercizio 3

[4 punti]

Calcolare ill seguente integrale

$$I=\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}\cdot\left(1+\sqrt{x}\right)^2}\,dx$$

Risoluzione

$x=t^2 \quad dx=2t\,dt \qquad t=\sqrt{x} \quad x=1\rightarrow t=1$

$x=4\rightarrow t=2$

$$I=\int_1^2 \frac{2\cancel{t}\,dt}{\cancel{t}(1+t)^2}=$$

$$=-(2)\frac{1}{(1+t)}\Big]_1^2=2\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6}\cdot 2=\frac{1}{3}$$

Esercizio 4

[5 punti]

Studiare la continuità e la derivabilità in $(x_0,y_0)=(0,0)$ della funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2\sin y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Risoluzione

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2 \operatorname{sen} y}{x^2+y^2}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2\cos^2\varphi\,\operatorname{sen}(\rho\operatorname{sen}\varphi)}{\rho^2}=$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\cos^2\varphi\,\frac{\operatorname{sen}(\rho\operatorname{sen}\varphi)}{\rho\operatorname{sen}\varphi}\cdot\rho\operatorname{sen}\varphi=$$

$=\lim_{\rho\to 0}\rho\operatorname{sen}\varphi\cos^2\varphi=0=f(0,0)$, poiché $|\operatorname{sen}\varphi\cos^2\varphi|\leq 1$ dunque f è continua in $(0,0)$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

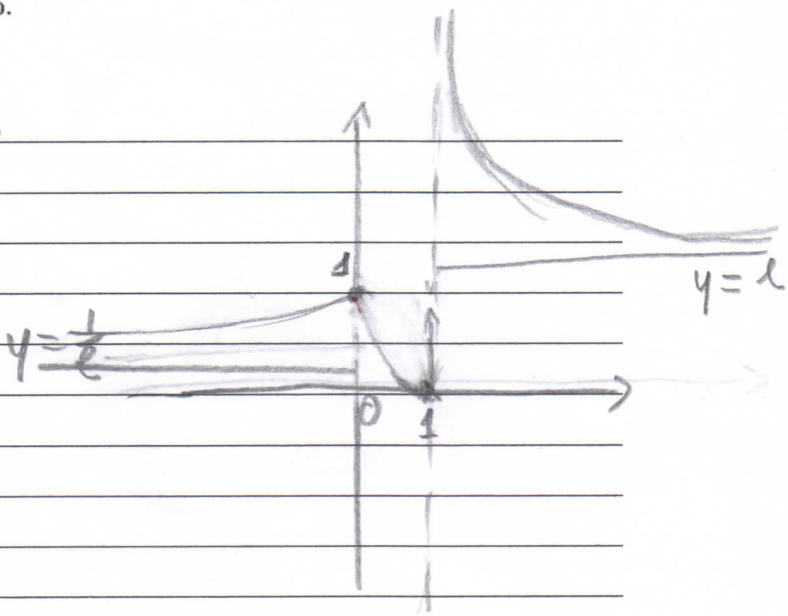
$$\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k}=0=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

Esercizio 5 [7 punti]

Trovare il dominio, eventuali simmetrie, zeri, punti di estremo locale ed asintoti della funzione $f(x) = e^{\frac{|x|}{x-1}}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

$D_f = \{x \neq 1\}$



$f(x) > 0 \qquad f(0) = 1$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = e \qquad y = e$ asintoto orizzontale

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = e^{-1}$

$x > 0 \quad f'(x) = e^{\frac{x}{x-1}} \frac{\cancel{x}-1\cancel{-x}}{(x-1)^2} = e^{\frac{x}{x-1}} \left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right) < 0$

$x < 0 \quad f'(x) = e^{\frac{-x}{x-1}} \frac{\cancel{-x}+1\cancel{+x}}{(x-1)^2} = e^{-\frac{x}{x-1}} \frac{1}{(x-1)^2} > 0$

$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} -e^{\frac{x-1+1}{x-1}} \frac{1}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1^-} -e^{1+\frac{1}{x-1}} \frac{1}{(x-1)^2} = (*)$

$y = \frac{1}{x-1} \to -\infty$ per $x \to 1^-$ $\quad (*) = \lim_{y \to -\infty} (-e) \cdot e^y y^2 = 0$

$\inf f = 0 \; ; \; \sup f(x) = +\infty$

$x = 0$ punto angoloso