Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore 28.6.22

Cognome .... Nome ....

Matricola .... Corso di Laurea ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di convergenza di una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ al limite $l \in \mathbb{R}$.

(ii) Fare l'esempio di una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\lim_{n\to+\infty} a_n = \pi$.

Risposta

(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\ell \in \mathbb{R}$ se $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $|\ell - a_n| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_0$.

(ii) P.e. per $a_n = \pi + \dfrac{1}{n+1}$ segue

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \pi$$

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema di Lagrange.

(ii) Trovare un punto c del teorema di Lagrange per $f(x) = x^3 - 2x^2$ nell'intervallo $[-2, 2]$.

Risposta

(i) Se $f \in C[a,b]$ è derivabile in (a,b), allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c.

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

(ii)

- $f \in C[-2,2]$ è derivabile in $(-2,2)$
- $f(2) = 2^3 - 2\cdot 2^2 = 0$, $f(-2) = (-2)^3 - 2\cdot 2^2 = -16$, $2-(-2) = 4$

$\Rightarrow \dfrac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)} = \dfrac{16}{4} = 4.$

- $f'(x) = 3x^2 - 4x \stackrel{!}{=} 4 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 + 4\cdot 3\cdot 4}}{6} =$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16+48}}{6} = \frac{4 \pm 8}{6} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{2}{3} \in (-2,2) \end{cases} \Rightarrow c = -2/3$$

Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x^2) + x\cdot\sin(x)}{x^4} =: \ell$$

Risoluzione

Numeratore da sviluppare fino al 4° ordine:

$$t = -x^2$$

- $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \Rightarrow \ln(1-x^2) = -x^2 - \frac{(-x^2)^2}{2} + o((-x^2)^2)$
  $= -x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) \quad (x\to 0)$
- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \Rightarrow x\cdot\sin(x) = x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^4) \quad (x\to 0)$

$$\Rightarrow \ln(1-x^2) + x\cdot\sin(x) = \cancel{-x^2} - \frac{x^4}{2} \cancel{+x^2} - \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$
$$= \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)x^4 + o(x^4) = -\frac{2}{3}x^4 + o(x^4) \sim -\frac{2}{3}x^4 \quad (x\to 0)$$

$$\Rightarrow \ell = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{2}{3}x^4}{x^4} = -\frac{2}{3}$$

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare l'integrale definito

$$I := \int_1^2 x\cdot\sqrt{x^2-1}\,dx$$

Risoluzione

Usando la sostituzione $t = \sqrt{x^2-1}$ segue:

- $\frac{dt}{dx} = \frac{1\cdot\cancel{2}x}{\cancel{2}\cdot\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\cdot dt$
- $x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{1^2-1} = 0, \quad x = 2 \Rightarrow t = \sqrt{2^2-1} = \sqrt{3}$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\sqrt{3}} \cancel{x}\cdot\sqrt{x^2-1}\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}}{\cancel{x}}\,dt = \int_0^{\sqrt{3}} \underbrace{(x^2-1)}_{=t^2}\,dt$$
$$= \int_0^{\sqrt{3}} t^2\,dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\cdot(\sqrt{3})^3 = \frac{1}{\cancel{3}_1}\cdot\cancel{(\sqrt{3})^2}^{1}\cdot\sqrt{3}$$
$$= \sqrt{3}$$

Esercizio 3

[4 punti]

Calcolare la derivata direzionale $D_v f(\pi, 2)$ per la funzione $f(x,y) = \cos\left(\frac{x}{y}\right)$ e il versore $v = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Risoluzione

• f è differenziabile con $f_x(x,y) = -\sin\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}$

$f_y(x,y) = -\sin\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{-x}{y^2} = \sin\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{x}{y^2}$

• $D_v f(\pi,2) = f_x(\pi,2)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - f_y(\pi,2)\cdot\frac{1}{2}$

• $f_x(\pi,2) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$, $f_y(\pi,2) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{2^2} = \frac{\pi}{4}$

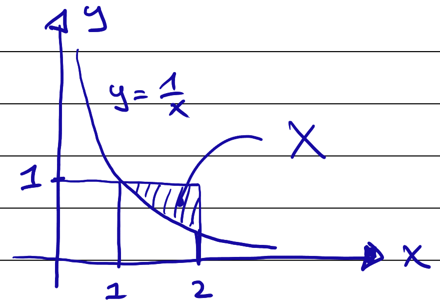
$\Rightarrow D_v f(\pi,2) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{8}$

Esercizio 4

[4 punti]

Disegnare l'insieme $X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2,\ \frac{1}{x} \leq y \leq 1\right\}$ e calcolare la sua misura $|X|$.

Risoluzione



• $|X| = \iint_X 1\,dx\,dy$

• X è y-semplice quindi per Fubini-Tonelli segue

$$|X| = \int_{x=1}^{2}\int_{y=\frac{1}{x}}^{1} 1\,dy\,dx = \int_{x=1}^{2} y\Big|_{y=\frac{1}{x}}^{1} dx = \int_{1}^{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \left[x - \ln(x)\right]_1^2 = 2 - \ln(2) - 1 + \overbrace{\ln(1)}^{=0}$$

$$= 1 - \ln(2)$$

Esercizio 5

[6 punti]

Trovare il dominio, eventuali zeri, asintoti e punti di estremo locale della funzione $f(x) = \dfrac{e^{(x^2-x+1)}}{x-1}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

- Dominio: $X = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- Zeri: $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in X$, quindi non ci sono zeri
- Asintoti: • $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x^2 - x + 1 = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$

  Inoltre $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \Rightarrow$ non ci sono asintoti obliqui

  • $\lim\limits_{x \to 1^\pm} \dfrac{e^{x^2-x+1}}{x-1} = \dfrac{e}{0^\pm} = \pm\infty \Rightarrow x = 1$ è un asintoto verticale.

- Estremi locali:

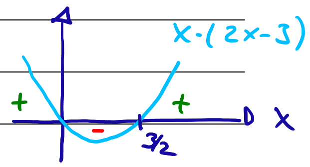
$$f'(x) = \frac{(x-1)\cdot e^{x^2-x+1}\cdot(2x-1) - 1\cdot e^{x^2-x+1}}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{(2x^2 - x - 2x \cancel{+1} \cancel{-1})\cdot e^{x^2-x+1}}{(x-1)^2} = \frac{x\cdot(2x-3)\cdot e^{x^2-x+1}}{(x-1)^2}$$

$e^{x^2-x+1} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$(x-1)^2 > 0 \ \forall x \neq 1$

$= 0 \iff x = 0$ opp. $x = \frac{3}{2}$.



Inoltre, $f'(x)$ cambia segno in

$x = 0$ da "+" a "−" $\Rightarrow x_0 = 0$ è un pto. di massimo locale

$x = 3/2$ da "−" a "+" $\Rightarrow x_1 = 3/2$ —"— minimo locale

Grafico: