Analisi Matematica 1. Durata della prova: 2 ore 28.7.14

Firma: ....

Cognome: .... Nome: ....

Matricola: .... Corso di Laurea: ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di derivata parziale $f_y(x,y)$ per una funzione $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(ii) Dire se esiste una funzione $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che è continua ma non derivabile parzialmente rispetto ad y in $(0,0)$. (Giustificare la risposta).

Risposta

(i) $f_y(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$

(ii) Sì, esiste. P.e. la funzione $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ è continua ma non derivabile parzialmente in $(0,0)$

Domanda 2

[4 punti]

Sia $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(0)\cdot f(1) > 0$. Allora

- [a] $f(x) > 0$ per ogni $x \in [a,b]$
- [b] ☒ l'insieme $\{f(\sin(x)) : x \in [0,\pi]\}$ ammette minimo
- [c] f è costante
- [d] non esiste $c \in [0,1]$ tale che $f(c) = 0$

(Giustificare la risposta)

Risposta

La funzione $g:[0,\pi] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(\sin(x))$ è continua sull'intervallo chiuso limitato $[0,\pi]$ quindi assume per il teorema di Weierstraß il minimo assoluto.

N.B. La risposta d) è sbagliata!!!

Esercizio 1

[4 punti]

Studiare il comportamento della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$

Risoluzione

Usando il limite notevole $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}=1$ segue $\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to \frac{1}{1} = 1 \neq 0$. Quindi per il criterio necessario la serie <u>non</u> converge. Visto che la serie è a termini positivi è regolare e quindi diverge a $+\infty$.

Esercizio 2

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan\left(1+\frac{\ln(x^2)}{\sqrt{x}}\right) = \pi/4$$

Risoluzione

Si ha $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln(x)}{x^{1/2}} \left(= \frac{+\infty}{+\infty}\right)$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2\,\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}\,x^{-1/2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{\sqrt{x}} = 0$$

Visto che la funzione arctan è continua segue

$$\arctan\Big(1+\underbrace{\frac{\ln(x^2)}{\sqrt{x}}}_{\to 0}\Big) \to \arctan(1) = \pi/4$$

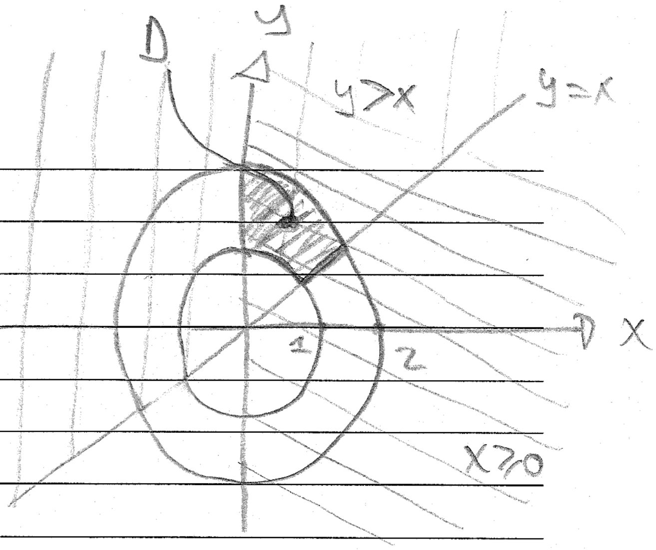
per $x\to+\infty$

Esercizio 3

[4 punti]

Disegnare il dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ 0 \le x \le y\}$ e calcolare l'integrale

$$I := \iint_D x \, dx \, dy$$



Risoluzione

Quindi D corrisponde a

$D' = [1,2] \times [\pi/4, \pi/2]$

in coord. polari. $\Rightarrow$

$$I = \int_1^2 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \rho \cdot \cos\vartheta \cdot \rho \, d\vartheta \, d\rho$$

$$= \frac{\rho^3}{3}\Big|_1^2 \cdot \sin\vartheta \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{8-1}{3} \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{7}{3} \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Esercizio 4

[5 punti]

Data $f(x,y) = x \cdot y$, trovare un versore $v \in \mathbb{R}^2$ tale che la derivata direzionale $D_v f(2,1) = 0$.

Risoluzione

$f_x(x,y) = y \Rightarrow f_x(2,1) = 1.$

$f_y(x,y) = x \Rightarrow f_y(2,1) = 2.$

Sia $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. Allora (per il teorema del gradiente)

$$D_v f(2,1) = v \cdot \operatorname{grad} f(2,1) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha + 2\beta \overset{!}{=} 0$$

Inoltre $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Quindi è da risolvere il sistema

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2\beta \\ \alpha^2 + \beta^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2\beta \\ 5\beta^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \pm\sqrt{1/5} \\ \alpha = \mp 2 \cdot \sqrt{1/5} \end{cases}$$

Quindi $v = \begin{pmatrix} \mp 2 \cdot \sqrt{1/5} \\ \pm \sqrt{1/5} \end{pmatrix}$

Esercizio 5

[7 punti]

Studiare la funzione $f(x)=\frac{x^2+4x+4}{3-x}$ (senza calcolare $f''(x)$) e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

Dominio: $\mathbb{R}\setminus\{3\}$. Simmetrie: No.

Intersezioni con gli assi: $f(x)=0 \iff x^2+4x+4=0 \iff x=-2$
$x=0 \Rightarrow y=4/3$.

Segno: $x^2+4x+4=(x-2)\geq 0$ sempre
dif. $3-x>0 \iff x<3$

$+ \quad \underset{3}{\times} \quad -$ segno dif

Derivata: $f'(x)=\frac{(3-x)\cdot(2x+4)+x^2+4x+4}{(3-x)^2}=\frac{-x^2+6x+16}{(3-x)^2}$

$-x^2+6x+16$: $+$ tra -2 e 8

$\Rightarrow f'(x)=0 \iff x=\frac{-6\pm\sqrt{36+4\cdot 16}}{-2}=\frac{-6\pm 10}{-2}=\begin{cases}8\\-2\end{cases}$

Inoltre, $f'(x)$ cambia segno in $x=8$ da $+$ a $-$ $\Rightarrow$ pto di max. loc.
$x=-2$ da $-$ a $+$ $\Rightarrow$ pto di min. loc.

Limiti: $\lim_{x\to 3^{+/-}} f(x)=\mp\infty$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\mp\infty$ $\Rightarrow$ possibile asintoto obl.

$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+4x+4}{3x-x^2}=-1=m$

$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-m\cdot x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+4x+4}{3-x}+x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+4x+4+3x-x^2}{3-x}=-7=q$

$\Rightarrow y=-x-7$ è un asintoto obliquo per $x\to\pm\infty$.

Grafico: