Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore **29.6.11**

Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola: .... **Corso di Laurea:** .... **Canale:** [A] [B] [C] [D]

Domanda 1

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di derivata parziale f_x per una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(ii) Calcolare l'equazione del piano tangente di $f(x, y) = \ln(1 + x^2 \cdot y^2)$ nel punto $(x_0, y_0) = (-1, 1)$.

Risposta

(i) $f_x(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$ se esiste finito

(ii) $f_x(x,y) = \frac{2x \cdot y^2}{1+x^2 \cdot y^2} \Rightarrow f_x(-1,1) = \frac{-2}{2} = -1$

$f_y(x,y) = \frac{2x^2 \cdot y}{1+x^2 \cdot y^2} \Rightarrow f_y(-1,1) = \frac{2}{2} = 1$

$\Rightarrow p(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0,y_0) \cdot (y - y_0)$

$= \ln(1+1) - (x+1) + (y-1) = \underline{\ln(2) - 2 - x + y}.$

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Enunciare il criterio della radice per le serie numeriche.

(ii) Studiare il comportamento della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1-3\cos(n!)}{5}\right)^n$. $=: a_n$

Risposta

(i) Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini positivi. Se esiste

$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} =: q$, allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ $\begin{cases} \text{converge se } q<1 \\ \text{diverge a } +\infty \text{ se } q>1 \\ \text{non si può stabilire il carattere se } q=1 \end{cases}$

(ii) $|\cos(n!)| \leq 1 \Rightarrow |1 - 3\cos(n!)| \leq 1+3 = 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow |a_n| \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n =: b_n$. Inoltre $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{b_n} = \frac{4}{5} = q < 1$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge (assolutamente)

Criterio del confronto

Esercizio 1

[3 punti]

La successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = \frac{n+1}{n+2}$

- [a] è limitata ma non converge
- [b] non è limitata
- [c] è decrescente e converge
- [d] è limitata e crescente

Risoluzione

$a_n = \frac{n+1+1-1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2} \Rightarrow$ • a_n è crescente

• $a_n \to 1$ per $n \to +\infty$

$\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata

Quindi d)

Esercizio 2

[3 punti]

Sia $f \in C^2(\mathbb{R})$ tale che $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{\ln(1+x^2)} = 1$. Allora il polinomio di McLaurin di ordine 2 di f è dato da

- [a] $T_2(x) = 1$
- [b] $T_2(x) = x^2 + 1$
- [c] $T_2(x) = x^2$
- [d] non si può calcolare $T_2(x)$

Risoluzione

Sappiamo che $f(x) - 1 \sim \ln(1+x^2) \sim x^2$ per $x \to 0$ $\Rightarrow$

$f(x) - 1 = x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$ $\Rightarrow$

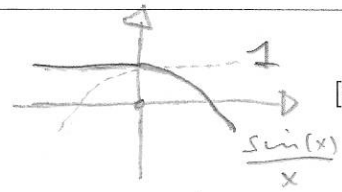
$f(x) = 1 + x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$ $\Rightarrow$

$T_2(x) = 1 + x^2$

Esercizio 3

[3 punti]

La funzione $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [-1,0] \\ \frac{\sin(x)}{x} & \text{se } x \in (0,1] \end{cases}$



- [a] è continua ma non derivabile
- [b] è oscillante
- [c] non è integrabile
- [d] è derivabile

Risoluzione

f è continua e derivabile $\forall\, x \neq 0$. In $x_0 = 0$ vale:

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 1 = 1$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

$\Big\}$ f è continua in $x_0 = 0$

$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1-1}{x} = 0$

$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\sin(x)}{x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \left(-\frac{x}{6} + o(x)\right) = 0$

$\frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)$

Visto che $f'_+(0) = f'_-(0)$, f è derivabile in $x_0 = 0 \Rightarrow$ d)

Esercizio 4 [4 punti]

Calcolare, se esiste, l'integrale improprio

$$\int_0^1 x \cdot \ln(x)\, dx =: I$$

Risoluzione

Calcoliamo prima

$$\int \underbrace{x \cdot \ln(x)}_{f' \cdot g}\, dx = \underbrace{\frac{x^2}{2} \cdot \ln(x)}_{f \cdot g} - \int \underbrace{\frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}}_{f \cdot g'}\, dx$$

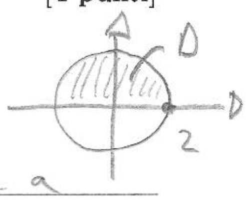
$$= \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \int \frac{x}{2}\, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{4} + C$$

$$\Rightarrow I = \lim_{a \to 0} \int_a^1 x \cdot \ln(x)\, dx = \lim_{a \to 0} \left[\frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{4} \right]_a^1$$

$$= -\frac{1}{4} - \underbrace{\lim_{a \to 0} \left(\frac{a^2}{2} \cdot \ln(x) - \frac{a^2}{4} \right)}_{=0} = -\frac{1}{4}$$

Esercizio 5 [4 punti]

Calcolare l'integrale doppio $\iint_D x^2 \cdot y\, dx\, dy =: I$ per $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$.



Risoluzione

Conviene passare alle coord. polari: D corrisponde a $D' = [0, 2] \times [0, \pi]$ in coord. polari (ρ, ϑ). Quindi da $x = \rho \cdot \cos(\vartheta)$, $y = \rho \cdot \sin(\vartheta)$, $dx dy = \rho \cdot d\rho \cdot d\vartheta$ segue

$$I = \iint_{D'} \rho^2 \cdot \cos^2(\vartheta) \cdot \rho \cdot \sin(\vartheta) \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\vartheta$$

$$= \left(\int_0^2 \rho^4\, d\rho \right) \cdot \left(-\int_0^\pi \underbrace{-\sin(\vartheta) \cdot \cos^2(\vartheta)}_{= \left(\frac{\cos^3(\vartheta)}{3} \right)'}\, d\vartheta \right)$$

(opp. usare la sost. $t = \cos(\vartheta)$)

$$= \left(\frac{\rho^5}{5} \Big|_0^2 \right) \cdot \left(-\frac{\cos^3(\vartheta)}{3} \Big|_0^\pi \right)$$

$$= \frac{32}{5} \cdot \left(-\frac{-1-1}{3} \right) = \frac{64}{15}$$

Esercizio 6

[5 punti]

Studiare la funzione $f(x) = (2x - x^2) \cdot e^{-x}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

- dominio: tutto $\mathbb{R}$
- Simmetrie: No
- intersezione con gli assi: $f(0)=0$ e

$$f(x) = x(2-x)\cdot \underbrace{e^{-x}}_{\neq 0\ \forall x} = 0 \iff x=0 \text{ opp. } x=2$$

- Segno: Visto che $e^{-x} > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ segue

$$f(x) > 0 \iff x\cdot(2-x) > 0 \iff 0 < x < 2.$$

- comportamento ai limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} (2x-x^2)\cdot e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-x^2}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} (2x-x^2)\cdot e^{-x} = (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty$$

$\Rightarrow$ $y=0$ è un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$

- $f'(x) = (2-2x)\cdot e^{-x} + (2x-x^2)(-1)\cdot e^{-x} = (x^2-4x+2)\cdot e^{-x}$

$\Rightarrow f'(x)=0 \iff x^2-4x+2=0 \iff x = 2\pm\sqrt{2} \approx 2 \pm 1{,}4 = \begin{cases} 3{,}4 \\ 0{,}6 \end{cases}$

Inoltre f' cambia segno in

- $x = 2-\sqrt{2}$ da "+" a "−" $\Rightarrow x = 2-\sqrt{2}$ è un pto. di max. loc.
- $x = 2+\sqrt{2}$ da "−" a "+" $\Rightarrow x = 2+\sqrt{2}$ è un pto. di min. loc.

$f''(x) = (2x-4)e^{-x} - (x^2-4x+2)e^{-x} = (-x^2+6x-6)e^{-x}$

$\Rightarrow f''(x)=0 \iff$

$x = 3\pm\sqrt{3} \approx 3 \pm 1{,}7 = \begin{cases} 4{,}7 \\ 1{,}3 \end{cases}$

Inoltre in $x = 3\pm\sqrt{3}$ cambia il segno di f'' $\Rightarrow$ $x = 3\pm\sqrt{3}$ sono pti. di flesso