Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola: .... **Corso di Laurea:** .... **Canale:** A B C D

Domanda 1

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di derivata parziale f_y per una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(ii) Calcolare l'equazione del piano tangente di $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$ nel punto $(x_0, y_0) = (1, -1)$.

Risposta

(i) $f_y(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$ se esiste finito.

(ii) $f_x(x,y) = \frac{2x}{1+x^2+y^2} \Rightarrow f_x(1,-1) = \frac{2}{3}$

$f_y(x,y) = \frac{2y}{1+x^2+y^2} \Rightarrow f_y(1,-1) = -\frac{2}{3}$

$\Rightarrow p(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$

$= \ln(3) + \frac{2}{3}(x-1) - \frac{2}{3}(y+1) = \underline{\underline{\ln(3) - \frac{4}{3} + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y}}$.

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Enunciare il criterio del rapporto per le serie numeriche.

(ii) Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$. $=: a_n$

Risposta

(i) Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini positivi. Se esiste $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =: q$, allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ $\begin{cases} \text{converge se } q<1 \\ \text{diverge a } +\infty \text{ se } q>1 \\ \text{non si può stabilire il carattere se } q=1. \end{cases}$

(ii) Applichiamo il criterio del rapporto:

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n \cdot n!} = \frac{2\cdot\cancel{2^n}\cdot\cancel{(n+1)}\cdot\cancel{n!}}{\cancel{(n+1)}\cdot(n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{\cancel{2^n}\cdot\cancel{n!}}$

$= 2\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{2}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{2}{e} = q < 1$ per $n \to +\infty$

$\Rightarrow$ La serie converge.

Esercizio 1

[3 punti]

La successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = \frac{n+2}{n+1}$

- a) è limitata ma non converge
- b) non è limitata
- c) è decrescente e converge
- d) è limitata e crescente

Risoluzione

$a_n = \frac{n+1+1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} \Rightarrow$ • a_n è decrescente

• $a_n \to 1$ per $n \to +\infty$

Quindi c)

Esercizio 2

[3 punti]

Sia $f \in C^2(\mathbb{R})$ tale che $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{1-\cos(x)} = 1$. Allora il polinomio di McLaurin di ordine 2 di f è dato da

- a) $T_2(x) = \frac{1}{2}$
- b) $T_2(x) = \frac{x^2+1}{2}$
- c) $T_2(x) = \frac{x^2}{2}$
- d) non si può calcolare $T_2(x)$

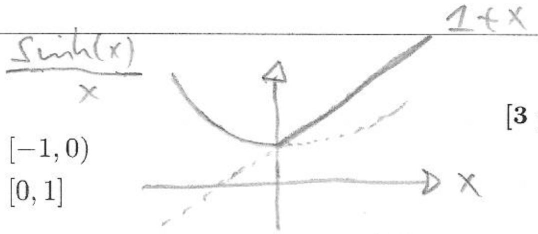
Risoluzione

Segue che $f(x) \sim 1-\cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$ per $x \to 0 \Rightarrow$

$f(x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ per $x \to 0 \Rightarrow$

$T_2(x) = \frac{x^2}{2}$

Esercizio 3



[3 punti]

La funzione $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{\sinh(x)}{x} & \text{se } x \in [-1,0) \\ 1+x & \text{se } x \in [0,1] \end{cases}$

- a) è continua ma non derivabile
- b) è irregolare
- c) non è integrabile
- d) è derivabile

Risoluzione

f è continua e derivabile $\forall x \neq 0$. In $x_0 = 0$ vale:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sinh(x)}{x} = 1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \parallel \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (1+x) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ è cont. in } x_0 = 0.$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{\sinh(x)}{x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\overbrace{\frac{x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x}}^{= 1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)} - 1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{x}{6} + o(x)\right) = 0$$

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1+x-1}{x}\right) = 1$$

Visto che $f'_+(0) \neq f'_-(0)$ f non è derivabile in $x_0 = 0 \Rightarrow$ a)

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste, l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx = I$$

Risoluzione

Calcoliamo prima

$$\int \underset{f'}{x^{-2}} \cdot \underset{g}{\ln(x)}\,dx = -\underset{f}{x^{-1}} \cdot \underset{g}{\ln(x)} - \int \underset{f}{(-x^{-1})} \cdot \underset{g'}{\frac{1}{x}}\,dx$$

$$= -x^{-1}\cdot\ln(x) - x^{-1} + c$$

$$= -\frac{1}{x}\left(\ln(x)+1\right) + c$$

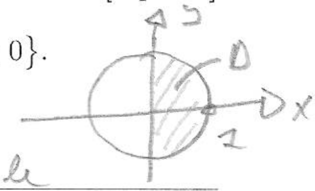
$$\Rightarrow I = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-2}\cdot\ln(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\left(\ln(x)+1\right)\Big|_1^b\right]$$

$$= \underbrace{\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{\ln(b)+1}{b}\right]}_{=0} + \frac{\ln(1)+1}{1} = 1$$

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare l'integrale doppio $\iint_D x\cdot y^2\,dx\,dy$ $=: I$ per $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1, x\geq 0\}$.



Risoluzione

Conviene passare alle coord. polari: D corrisponde a $D' = [0,1]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ in coord. polari (ρ,ϑ). Quindi da $x=\rho\cdot\cos(\vartheta)$, $y=\rho\cdot\sin\vartheta$ e $dx\,dy = \rho\cdot d\rho\cdot d\vartheta$ segue:

$$I = \iint_{D'} \rho\cdot\cos(\vartheta)\cdot\rho^2\cdot\sin^2(\vartheta)\cdot\rho\,d\rho\cdot d\vartheta$$

$$= \left(\int_0^1 \rho^4\,d\rho\right)\cdot\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos(\vartheta)\cdot\sin^2(\vartheta)}_{=\left(\frac{\sin^3(\vartheta)}{3}\right)'}\,d\vartheta\right)$$

(opp. usare la sost. $\sin(\vartheta) = t$)

$$= \left(\frac{\rho^5}{5}\Big|_0^1\right)\cdot\left(\frac{\sin^3(\vartheta)}{3}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}\right) = \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1+1}{3}\right) = \frac{2}{15}$$

Esercizio 6

[5 punti]

Studiare la funzione $f(x) = (x^2 - x) \cdot e^{2x}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

- Dominio: tutto $\mathbb{R}$
- Simmetrie: no
- intersezione con gli assi: $f(0) = 0$ e
  $f(x) = x \cdot (x-1) \cdot \underbrace{e^{2x}}_{\neq 0 \, \forall x} = 0 \iff x = 0$ opp. $x = 1$
- Segno: Visto che $e^{2x} > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$ segue
  $f(x) > 0 \iff x \cdot (x-1) > 0 \iff x < 0$ opp. $x > 1$
- comportamento ai limiti:
  $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - x) \cdot e^{2x} = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$
  $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - x) \cdot e^{2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(-x)^2 + x}{e^{2x}} = 0$

$\Rightarrow y = 0$ è un asintoto orizzontale per $x \to -\infty$

- $f'(x) = (2x-1)e^{2x} + (x^2-x) \cdot 2 \cdot e^{2x} = (2x^2-1)e^{2x}$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \iff 2x^2 - 1 = 0 \iff x = \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}} \simeq \pm 0{,}7\ldots$

Inoltre f' cambia segno in
- $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ da "+" a "−" $\Rightarrow x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ è un pto. di max. loc.
- $x = +\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ da "−" a "+" $\Rightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ è un pto di min. loc.

- $f''(x) = 4x \cdot e^{2x} + (2x^2-1) \, 2 \cdot e^{2x}$
  $= (4x^2 + 4x - 2) \, e^{2x}$

$\Rightarrow f''(x) = 0 \iff 4x^2 + 4x - 2 = 0$

$\iff x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} \approx \dfrac{-1 \pm 1{,}7}{2} = \begin{cases} 0{,}35 \\ -1{,}35 \end{cases}$

Inoltre in $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$ cambia il segno di f'' $\Rightarrow$ $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$ sono pti di flesso.