Domanda 1

[4 punti]

29.1.21

(i) Dare la definizione di derivabilità in $x = x_0$ per una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Studiare la derivabilità di $f(x) = |x| \cdot \sin(x)$ in $x_0 = 0$.

Sol: (i) f è derivabile in $x = x_0$ con derivata $f'(x_0)$ se converge il limite $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} =: f'(x_0) \in \mathbb{R}$.

ii) $\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \underbrace{|h|}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{\sin(h)}{h}}_{\to 1 \text{ per } h\to 0} = 0 \cdot 1 = 0$ converge

$\Rightarrow$ f è derivabile in $x_0 = 0$ con derivata $f'(0) = 0$

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema degli zeri.

(ii) Verificare che la funzione $f(x) = x^5 + 3x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ ammette uno zero nell'intervallo $[0, 1]$.

Sol: i) Se $f \in C[a,b]$ con $f(a)\cdot f(b) < 0$ allora $\exists\, c \in (a,b)$ con $f(c) = 0$.

ii)
- $f \in C[0,1]$
- $f(0) = -2 < 0$
- $f(1) = 1 + 3 - 4 + 5 - 2 = 3 > 0$

$f(0)$ e $f(1)$ hanno segno opposto

$\Rightarrow$ $\exists\, c \in (0,1)$ con $f(c) = 0$.

Esercizio 1

[5 punti]

Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{3^n \cdot n!}{(2n)^n}}_{=: a_n} =: S$$

Sol: La serie S è a termini positivi $a_n > 0$. Applichiamo il criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{\cancel{n+1}} \cdot \overbrace{(n+1)!}^{=\cancel{n!}\cdot\cancel{(n+1)}}}{\underbrace{(2(n+1))^{n+1}}_{=2^{\cancel{n+1}}\cdot (n+1)^{\cancel{n+1}}}} \cdot \frac{\overbrace{(2n)^n}^{=\cancel{2^n}\cdot n^n}}{\cancel{3^n}\cdot \cancel{n!}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n}$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\to e \text{ per } n\to+\infty}} \to \frac{3}{2\cdot e} =: q$$

Visto che $e > 2$ segue $q = \frac{3}{2e} < \frac{3}{2\cdot 2} = \frac{3}{4} < 1$

$\Rightarrow$ La serie S converge per il criterio del rapporto.

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\,e^{x}+\ln\left(\frac{1-2x}{e^{2}}\right)+\sin(x^{2})}{x^{3}} =: \ell$$

Sol: Usiamo Taylor. Visto che il denominatore è di 3 grado, il numeratore è da sviluppare fino al 3° ordine per $x\to 0$:

- $e^{x} = 1+x+\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{6}+o(x^{3}) \Rightarrow 2e^{x} = 2+2x+x^{2}+\frac{x^{3}}{3}+o(x^{3})$ per $x\to 0$.
- $\ln\left(\frac{1-2x}{e^{2}}\right) = \ln(1-2x) - \underbrace{\ln(e^{2})}_{=2} = \ln(1-2x)-2$
- $\ln(1+t) = t-\frac{t^{2}}{2}+\frac{t^{3}}{3}+o(t^{3})$ per $t\to 0$.

  Ponendo $t=-2x\to 0$ per $x\to 0$ segue

  $$\ln(1-2x) = -2x-\frac{(-2x)^{2}}{2}+\frac{(-2x)^{3}}{3}+o((-2x)^{3})$$

  $$= -2x-2\cdot x^{2}-\frac{8x^{3}}{3}+o(x^{3}) \quad \text{per } x\to 0$$

- $\sin(t) = t+o(t^{2})$ per $t\to 0$. Ponendo $t=x^{2}\to 0$ per $x\to 0$ segue

  $\sin(x^{2}) = x^{2}+o((x^{2})^{2}) = x^{2}+o(x^{4}) = x^{2}+o(x^{3})$ per $x\to 0$

Quindi risulta:

$$\frac{2\,e^{x}+\ln\left(\frac{1-2x}{e^{2}}\right)+\sin(x^{2})}{x^{3}}$$

$$= \frac{\left(\cancel{2}+\cancel{2x}+\cancel{x^{2}}+\frac{x^{3}}{3}\right)+\left(\cancel{-2x}\cancel{-2x^{2}}-\frac{8}{3}x^{3}\right)\cancel{-2}+\cancel{x^{2}}+o(x^{3})}{x^{3}}$$

$$= \frac{\frac{\cancel{x^{3}}}{3}-\frac{8}{3}\cancel{x^{3}}}{\cancel{x^{3}}}+o(x^{3}) \sim -7/3 \quad \text{per } x\to 0$$

$= -7/3$

$\Rightarrow$ Il limite converge a $\ell = -7/3$

Esercizio 3

[4 punti]

Studiare la continuità in $(x_0, y_0) = (0, 0)$ della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^{2}\cdot(1-\cos(y))}{x^{4}+y^{4}} & \text{if } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{if } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Sol: • f è continua in $(x_0, y_0) = (0,0)$ $\Leftrightarrow$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$.

Quindi studiamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \cdot (1-\cos(y))}{x^4+y^4}$$

Ponendo $y = mx$ per $m \in \mathbb{R}$ risulta

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}^{\,1} \cdot (1-\cos(mx))}{x^{\cancel{4}\,2} + m^4 x^{\cancel{4}\,2}} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(mx)}{(1+m^4)\cdot x^2 \cdot m^2 / m^2}$$

$$= \frac{m^2}{1+m^4} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\overbrace{m x}^{=:t\to 0})}{\underbrace{(m\cdot x)^2}_{=t^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m^2}{1+m^4} \quad \text{dipende da } m$$

$= \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ non esiste $\Rightarrow$ f non è continua in $(0,0)$.

Esercizio 4 **[4 punti]**

Calcolare l'equazione del piano tangente al grafico di $f(x,y) = 2 + x \cdot e^{\sin(y)}$ in $(x_0, y_0) = (1, \pi)$.

Sol: • L'equazione del piano tangente è

$$z = p(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

• $f(1,\pi) = 2 + 1 \cdot \underbrace{e^{\overbrace{\sin(\pi)}^{=0}}}_{=e^0=1} = 2+1 = 3$

• $f_x(x,y) = 1 \cdot e^{\sin(y)} \Rightarrow f_x(1,\pi) = e^{\sin(\pi)} = 1$

• $f_y(x,y) = x \cdot e^{\sin(y)} \cdot \cos(y) \Rightarrow f_y(1,\pi) = 1 \cdot \overbrace{e^{\sin(\pi)}}^{=1} \cdot \overbrace{\cos(\pi)}^{=-1} = -1$

$\Rightarrow p(x,y) = 3 + 1\cdot(x-1) - 1\cdot(y-\pi)$

Quindi l'equazione del piano tangente è

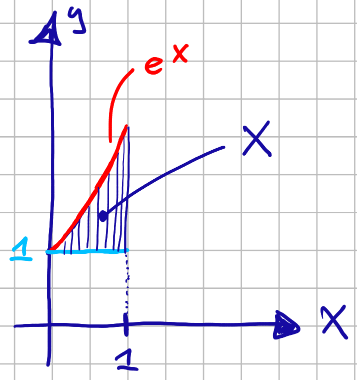
$$z = 3 + (x-1) - (y-\pi)$$
$$= 2 + \pi + x - y$$

Esercizio 5 **[6 punti]**

Disegnare il dominio $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1],\ 1 \le y \le e^x\}$ e calcolare l'integrale doppio

$$\iint_X \underbrace{4xy}_{=:f(x,y)}\, dx\, dy =: I$$

Sol:



- $f(x,y) = 4xy$ è continua
- X è y-semplice

Quindi per il teorema di Fubini-Tonelli segue

$$I = \int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=1}^{e^x} 4 \cdot x \cdot y \, dy \right) dx = \int_{x=0}^{1} \left[\cancel{4}^{\,2} \cdot x \cdot \frac{y^2}{\cancel{2}} \right]_{y=1}^{e^x}$$

$$= 2 \cdot \int_0^1 x \cdot \left[\overbrace{(e^x)^2}^{=e^{2x}} - 1^2 \right] dx$$

$$= 2 \cdot \int_0^1 \underbrace{x}_{=f} \cdot \underbrace{(e^{2x} - 1)}_{=g'} \, dx$$

integrazione per parti

$$= 2 \cdot \left(\left[\underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{\left(\tfrac{1}{2} e^{2x} - x \right)}_{g} \right]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{\left(\tfrac{1}{2} e^{2x} - x \right)}_{g} dx \right)$$

$$= 2 \cdot \left(1 \cdot \left(\tfrac{1}{2} e^2 - 1 \right) - 0 \cdot (\ldots) - \left[\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} e^{2x} - \tfrac{x^2}{2} \right]_0^1 \right)$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{e^2}{2} - 1 \right) - 2 \cdot \left(\frac{1}{4} e^2 - \frac{1^2}{2} - \left(\frac{1}{4} \cdot \underbrace{e^{2 \cdot 0}}_{=1} - \frac{0^2}{2} \right) \right)$$

$$= e^2 - 2 - \frac{1}{2} e^2 + 1 + \frac{1}{2}$$

$$= \boxed{\frac{e^2 - 1}{2}}$$