**Analisi Matematica. Durata della prova: 2 ore** **29.1.24**

Firma: ..............................

**Cognome** ........................................ **Nome** ........................................

**Matricola** ........................................ **Corso di Laurea:** Informatica

| | |
|---|---|
| D1 | |
| D2 | |
| E1 | |
| E2 | |
| E3 | |
| E4 | |
| E5 | |
| $\Sigma$ | |

## Domanda 1

**[4 punti]**

(i) Dare la definizione di successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente al limite $l \in \mathbb{R}$

(ii) Dare l'esempio di una successione convergente al limite $l = e$

**Risposta**

(i) Si dice che $\lim_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $|l - a_n| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$.

(ii) P.e. $\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

## Domanda 2

**[4 punti]**

(i) Enunciare il Teorema di Rolle

(ii) Verificare che $f(x) := x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ ammette un punto critico nell'intervallo $[0, 1]$.

**Risposta**

(i) Se $f \in C[a,b]$ è derivabile in $(a,b)$ e $f(a) = f(b)$, allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c. $f'(c) = 0$.

(ii) • $f \in C[0,1]$ ed è derivabile in $(0,1)$

• $f(0) = 1$, $f(1) = 1^4 - 1^3 + 1^2 - 1 + 1 = 1 = f(0)$

$\overset{\text{Rolle}}{\Longrightarrow}$ $\exists\, c \in (0,1)$ con $f'(c) = 0$.

## Esercizio 1

**[4 punti]**

Studiare la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3+3}{3^n} =: S$

### Risoluzione

• $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Applicando il criterio della radice segue:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^3+3}{\cancel{3^{n+1}}\,3} \cdot \frac{\cancel{3^n}\,1}{n^3+3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\overbrace{(n+1)^3+3}^{\sim n^3}}{\underbrace{n^3+3}_{\sim n^3 \text{ per } n \to +\infty}}$$

$$\sim \frac{1}{3} \cdot \frac{n^3}{n^3} = \frac{1}{3} \quad \text{per } n \to +\infty$$

Quindi $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to \dfrac{1}{3} = q < 1$

$\Rightarrow$ La serie $S$ converge.

## Esercizio 2

**[5 punti]**

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot e^x - \ln(1+x)}{1-\cos(x)}$$

### Risoluzione

• $1 - \cos(x) \sim \dfrac{x^2}{2}$ per $x \to 0$.

• Numeratore da sviluppare fino al 2° ordine:

  • $e^x = 1 + x + o(x) \Rightarrow x \cdot e^x = x + x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$

  • $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ per $x \to 0$

$$\Rightarrow x \cdot e^x - \ln(1+x) = \cancel{x} + x^2 \cancel{- x} + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$= \frac{3}{2}x^2 + o(x^2) \sim \frac{3}{2} \cdot x^2 \quad \text{per } x \to 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot e^x - \ln(1+x)}{1-\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{3/2\, \cancel{x^2}\,1}{1/2\, \cancel{x^2}\,1} = 3$$

## Esercizio 3

[5 punti]

Calcolare tutti gli asintoti della funzione $f(x) := \dfrac{2x^2 + x + 1}{x - 1}$

### Risoluzione

• Asintoto verticale: $\lim_{x \to 1^\pm} f(x) = \dfrac{2 \cdot 1^2 + 1 + 1}{0^\pm} = \dfrac{4}{0^\pm} = \pm\infty$

$\Rightarrow$ $x = 1$ è un asintoto verticale di $f$.

• $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{\cancel{x^2}^{\,x} \cdot \overbrace{(2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}^{\to 2}}{\cancel{x}_{\,1} \cdot \underbrace{(1 - \frac{1}{x})}_{\to 1 \text{ per } x \to \pm\infty}} = 2 \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$

$\Rightarrow$ possibilità di asintoti obliqui:

• $\lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{\cancel{x^2} \cdot (2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{\cancel{x^2}(1 - \frac{1}{x})} = 2 =: m$

• $\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - m \cdot x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left( \dfrac{2x^2 + x + 1}{x - 1} - 2x \cdot \dfrac{x-1}{x-1} \right)$

$= \lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{\cancel{2x^2} + x + 1 \cancel{- 2x^2} + 2x}{x - 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{3x + 1}{x - 1} = 3 =: q$

$\Rightarrow$ $y = m \cdot x + q = 2 \cdot x + 3$ è un asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$.

## Esercizio 4

[5 punti]

Calcolare il piano tangente $p(x, y)$ della funzione $f(x, y) := \dfrac{x \cdot \sin(x)}{\sqrt{y}}$ nel punto $(x_0, y_0) = \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$

### Risoluzione

• $p(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$

• $f(x_0, y_0) = \dfrac{\pi/2 \cdot \overbrace{\sin(\pi/2)}^{= 1}}{\sqrt{1}} = \pi/2$

• $f_x(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{y}} \cdot (1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x)) \Rightarrow$

$f_x(x_0, y_0) = \dfrac{1}{\sqrt{1}} \cdot \left( \overbrace{\sin(\pi/2)}^{= 1} + \pi/2 \cdot \overbrace{\cos(\pi/2)}^{= 0} \right) = 1$

• $f_y(x, y) = x \cdot \sin(x) \cdot \dfrac{\partial}{\partial y}\left(y^{-1/2}\right) = x \cdot \sin(x) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot y^{-3/2}$

$= -\dfrac{x \cdot \sin(x)}{2 \cdot y^{3/2}} \Rightarrow$

$f_y(x_0, y_0) = -\dfrac{\pi/2 \cdot \sin(\pi/2)}{2 \cdot 1^{3/2}} = -\pi/4$

Quindi $p(x, y) = \underline{\underline{\pi/2 + 1 \cdot (x - \pi/2) - \pi/4 (y - 1)}}$

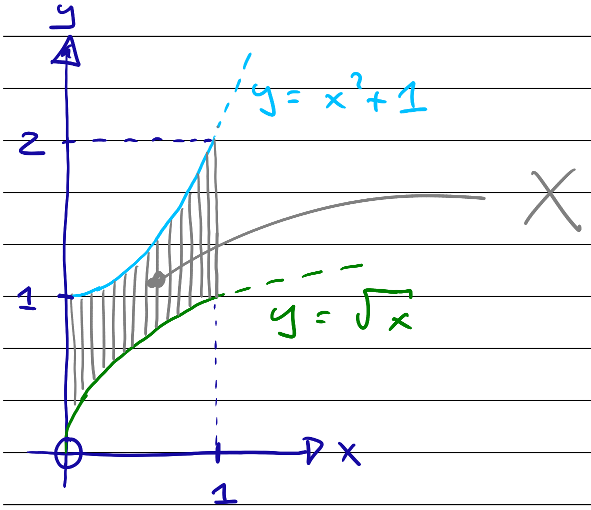
## Esercizio 5

**[5 punti]**

Disegnare il dominio $X := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1],\ \sqrt{x} \le y \le x^2+1\}$ e calcolare l'integrale doppio

$$I := \iint_X 2xy\,dx\,dy$$

### Risoluzione




• $X$ è $y$-semplice e la funzione integranda $f(x,y) = x \cdot y$ è continua quindi per Fubini-Tonelli segue:

$$I = \int_{x=0}^{1}\int_{y=\sqrt{x}}^{x^2+1} 2\cdot x\cdot y\,dy\,dx = \int_0^1 x\cdot\left[y^2\right]_{y=\sqrt{x}}^{x^2+1} dx$$

$$= \int_0^1 x\cdot\left((x^2+1)^2-(\sqrt{x})^2\right) dx$$

$$= \int_0^1 x\cdot\left(x^4+2x^2+1-x\right) dx$$

$$= \int x^5+2x^3-x^2+x\,dx$$

$$= \left[\frac{x^6}{6}+\frac{2x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{6}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2} = \frac{1+3-2+3}{6} = \underline{\underline{5/6}}$$