Analisi Matematica 1, Scritto 2-A. Durata della prova: 2 ore 11.2.11

Cognome: .... Nome: ....

Matricola: .... Corso di Laurea: .... Canale:

1	
2	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
2	

Domanda 1

[2+3 punti]

(i) Enunciare il teorema degli zeri.

(ii) Verificare che l'equazione $e^x = \sin(x)$ ammette almeno una soluzione $x \in \mathbb{R}$.

Risposta

(i) Se $f \in C[a,b]$ con $f(a) \cdot f(b) < 0$ allora

$\exists\, c \in [a,b]$ t.c. $f(c) = 0$.

(ii) Vale che $e^x > 1$ per $x > 0$, $e^x < 1$ per $x < 0$

e $\sin(x) \in [-1,1]$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Quindi segue per

$f(x) := e^x - \sin(x)$: $f \in C[-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e

$$\left.\begin{array}{l} f(-\frac{3\pi}{2}) = e^{-\frac{3}{2}\pi} - 1 < 0 \\ f(\frac{\pi}{2}) = e^{\frac{\pi}{2}} - 1 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, c \in [-\tfrac{3}{2}\pi, \tfrac{\pi}{2}] \text{ con } f(c) = 0.$$

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di derivata parziale $f_x(x,y)$ per una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(ii) Trovare una funzione derivabile $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che $f_x(x,y) = x$ e $f_y(x,y) = 2$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

Risposta

(i)

$$f_x(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

se il limite esiste finito.

(ii) p.e. $f(x,y) = \frac{x^2}{2} + 2y$.

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie convergente. Allora

b_n
$\shortparallel$

[a] $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ~~[b]~~ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - a_n \sim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ per $n \to +\infty$

[c] $\lim_{n\to+\infty} n \cdot a_n = 0$ [d] nessuna delle precedenti

Risoluzione

Visto che la serie converge segue $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$. Inoltre $b_n \to e$ per $n \to +\infty$ e quindi

$\frac{b_n - a_n}{b_n} = 1 - \frac{a_n}{b_n} \to 1 - \frac{0}{e} = 1 \Rightarrow b_n - a_n \sim b_n$ per $n \to +\infty$

Esercizio 2

[3 punti]

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $\int_0^2 f(x)\,dx = 1$. Allora

[a] $\int_0^1 f(2x)\,dx = 1$ [b] $f(x) \geq 0 \ \forall\, x \in [0,2]$

~~[c]~~ $\exists\, x \in [0,2]$ tale che $f(x) = \frac{1}{2}$ [d] $\int_0^2 f^2(x)dx = 1$

Risoluzione

Sia $a = 0$, $b = 2$. Allora per il teorema della media segue: $\exists\, c \in [0,2]$ t.c.

$\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b-a) = f(c) \cdot 2$

$\shortparallel$

$1 \Rightarrow f(c) = \frac{1}{2}$

Esercizio 3

[3 punti]

La funzione $f(x,y) = \begin{cases} y & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ nel punto $(0,0)$ è

[a] continua [b] differenziabile [c] derivabile rispetto a x ~~[d]~~ derivabile rispetto a y

Risoluzione

$\lim_{h\to 0} \frac{f(\overset{\mathbb{Q}}{0}, h) - f(\overset{\mathbb{Q}}{0}, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h - 0}{h} = 1$

Quindi f è derivabile parzialmente rispetto a y

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - \cos(\sinh(x))}{x^4} = \frac{1}{6}$$

Risoluzione

$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4) = x + o(x^2)$ per $x \to 0$

$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^4)$ per $t \to 0$

$t = \sinh(x) \to$ ($t \downarrow 0$)

$$\stackrel{\downarrow}{=} 1 - \frac{\left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2}{2} + \frac{(x + o(x^2))^4}{24} + o(\overbrace{\sinh^4(x)}^{\sim x^4}) \quad = o(x^4)$$

$$= 1 - \frac{x^2 + 2x \cdot \frac{x^3}{6} + o(x^4)}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \left(\frac{1}{24} - \frac{4}{24}\right) x^4 + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{3}{24} x^4 + o(x^4)$$

$$\Rightarrow \cos(x) - \cos(\sinh(x)) = \cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^4}{24} - \cancel{1} + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{3}{24} x^4 + o(x^4)$$

$$= \frac{4}{24} x^4 + o(x^4) = \frac{1}{6} x^4 + o(x^4) \Rightarrow$$

$$\frac{\cos(x) - \cos(\sinh(x))}{x^4} = \frac{\frac{1}{6} x^4 + o(x^4)}{x^4} \to \frac{1}{6} \quad \text{per } x \to 0$$

Esercizio 5

[4 punti]

Sia $f(x, y) = 1 + xy$ e $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. In quali punti $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ vale $D_v f(x_0, y_0) = 1$?

Risoluzione

$f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, quindi per il teorema del gradiente segue (usando $f_x(x, y) = y$ e $f_y(x, y) = x$)

$$D_v f(x_0, y_0) = \operatorname{grad} f(x_0, y_0) \cdot v$$

$$= (y_0, x_0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(y_0 - x_0) \overset{!}{=} 1$$

Quindi tutti i punti sulla retta $\frac{1}{\sqrt{2}}(y - x) = 1$

$\Leftrightarrow y = \sqrt{2} + x$ verificano la condizione

$D_v f(x, y) = 1$.

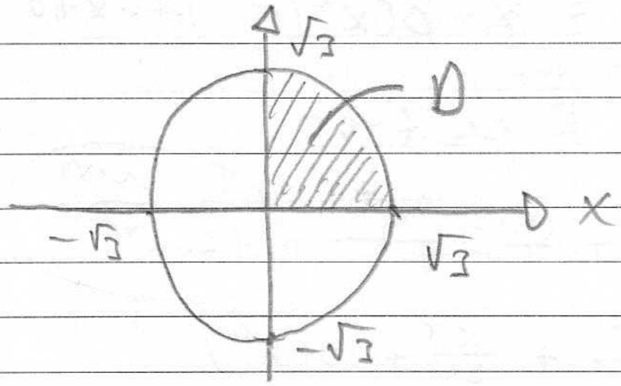
Esercizio 6

[5 punti]

Disegnare il dominio $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 3,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$ e calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D xy\, dx\, dy =: I$$

Risoluzione



Conviene passare alle coordinate polari:

D espresso in coord. polari corrisponde a

$$D' = \{(\rho, \vartheta) \mid \rho \in [0, \sqrt{3}],\ \vartheta \in [0, \pi/2]\}$$
$$= [0, \sqrt{3}] \times [0, \pi/2].$$ Quindi segue

$$I = \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{\pi/2} \overbrace{\rho \cdot \cos(\vartheta)}^{=x} \cdot \overbrace{\rho \cdot \sin(\vartheta)}^{=y} \cdot \rho \cdot d\vartheta\, d\rho$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} \rho^3\, d\rho \cdot \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin(\vartheta)}_{=f} \cdot \underbrace{\cos(\vartheta)}_{=f'}\, d\vartheta$$

$$= \left(\frac{\rho^4}{4} \Big|_0^{\sqrt{3}} \right) \cdot \left(\frac{\sin^2(\vartheta)}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right)$$

$$= \frac{(\sqrt{3})^4}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{8}$$