Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola: .... **Corso di Laurea:** .... **Canale:**

Domanda 1

[2+3 punti]

(i) Enunciare il teorema degli zeri.

(ii) Verificare che l'equazione $\cos(x) = e^x$ ammette almeno una soluzione $x \in \mathbb{R}$.

Risposta

(i) Cfr. compito 2-A.

ii) Per caso vale l'equazione per $x = 0$. Senza usare questo fatto si può procedere così:

~~(ii)~~ Vale che $e^x > 1 \ \forall x > 0$, $e^x < 1 \ \forall x < 0$ e $\cos(x) \in [-1, 1] \ \forall x \in \mathbb{R}$. Quindi segue per $f(x) := e^x - \cos(x)$: $f \in C[-2\pi, \pi]$ e

$$\left.\begin{array}{l} f(-2\pi) = e^{-2\pi} - 1 < 0 \\ f(\pi) = e^{\pi} - 1 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in [-2\pi, \pi] \text{ t.c. } f(c) = 0$$

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di derivata parziale $f_y(x, y)$ per una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(ii) Trovare una funzione derivabile $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che $f_x(x, y) = 2$ e $f_y(x, y) = y$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

Risposta

(i)

$$f_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

se il limite esiste finito

(ii)

p.e. $f(x, y) = 2x + \frac{y^2}{2}$

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini positivi convergente. Allora

- [a] $\lim_{n\to+\infty} n \cdot a_n = 0$
- [b] $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$
- [c] $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n + a_n \sim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ per $n \to +\infty$
- [d] nessuna delle precedenti

Risoluzione

Cfr. Compito 2-A

Esercizio 2

[3 punti]

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $\int_0^1 f(x)\, dx = 2$. Allora

- [a] $f(x) \geq 0 \;\forall\, x \in [0,1]$
- [b] $\int_0^1 f^2(x)dx = 4$
- [c] $\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)\, dx = 2$
- [d] $\exists\, x \in [0,1]$ tale che $f(x) = 2$

Risoluzione

Per il teorema della media (cfr. compito 2-A)

Esercizio 3

[3 punti]

La funzione $f(x,y) = \begin{cases} y & \text{se } y \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } y \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ nel punto $(0,0)$ è

- [a] continua
- [b] differenziabile
- [c] derivabile rispetto a x
- [d] derivabile rispetto a y

Risoluzione

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,\underset{\mathbb{Q}}{0}) - f(0,\underset{\mathbb{Q}}{0})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

Quindi f è derivabile parzialmente rispetto a x

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh(\sin(x)) - \cosh(x)}{x^4} = -\frac{1}{6}$$

Risoluzione

Ragionando come nel compito 2-A segue

Esercizio 5

[4 punti]

Sia $f(x,y) = 1 - xy$ e $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. In quali punti $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ vale $D_v f(x_0, y_0) = 1$?

Risoluzione

Come sul compito 2-A segue:

Tutti i punti sulla retta

$-\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) = 1 \iff y = -\sqrt{2} - x$

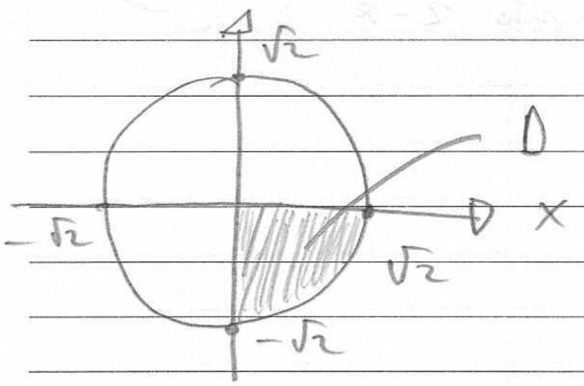
verificano la condizione $D_v f(x,y) = 1.$

Esercizio 6 [5 punti]

Disegnare il dominio $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2,\ x \geq 0,\ y \leq 0\}$ e calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D xy\, dx\, dy = I$$

Risoluzione



Si procede come nel compito 2-A:

D in coordinate polari corrisponde a

$D' = [0, \sqrt{2}] \times [\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$. Quindi

$$I = \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3\, d\rho \cdot \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \sin(\vartheta) \cdot \cos(\vartheta)\, d\vartheta$$

Cfr. compito 2-A

$$= \frac{(\sqrt{2})^4}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$