Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore 3.9.15

Firma: ....

Cognome .... Nome .... A.A. ....

Matricola .... Corso di Laurea ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di derivata f' per una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Calcolare l'equazione della retta tangente t di $f(x) = \ln(1 + x^2)$ nel punto $x_0 = -1$.

Risposta

(i) cfr. appunti

(ii) • $t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) = f(-1) + f'(-1)(x+1)$

• $f(x_0) = f(-1) = \ln(2)$

• $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x \Rightarrow f'(x_0) = \frac{-2}{2} = -1$

$\Rightarrow t(x) = \ln(2) - (x+1)$

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema degli zeri.

(ii) Verificare che la funzione $f(x) = x \ln(x^2) - 2$ ammette uno zero in $[1, e]$.

Risposta

(i) cfr. appunti

(ii) • $f(1) = 1 \cdot \ln(1) - 2 = -2 < 0$

• $f(e) = e \cdot \ln(e^2) - 2 = 2(e-1) > 0$

• f è continua

$\overset{i)}{\Rightarrow}$ f ammette uno zero in $[1, e]$

Esercizio 1

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+n}-n \quad =: a_n$$

Risoluzione

$$(a-b)(a+b) = a^2-b^2$$

$$a_n = \frac{(\sqrt{n^2+n}-n)\cdot(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{\cancel{n^2}+n-\cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

$$= \frac{\cancel{n}\,1}{\cancel{n}(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \to \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{1+\frac{1}{n}} \hookrightarrow \sqrt{1} = 1$$

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare il polinomio di McLaurin di ordine 3 della funzione $f(x) = \sin(x)\cdot\cos(x)$.

Risoluzione

- $\sin(x) = x - x^3/6 + o(x^3)$
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$

$$\Rightarrow \sin(x)\cdot\cos(x) = \left(x - x^3/6 + o(x^3)\right)\cdot\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)$$

$$= x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

$$= x - 4/6\cdot x^3 + o(x^3)$$

$$= x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\Rightarrow T_3(x) = x - \frac{2}{3}x^3$$

Esercizio 3

[5 punti]

Studiare la convergenza del seguente integrale improprio. Nel caso in cui converga, calcolarne il valore

$$I := \int_1^9 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx$$

Risoluzione

$$I = \lim_{c \to 1^+} \int_c^9 (x-1)^{-1/3}\,dx = \lim_{c \to 1^+} \left[\frac{(x-1)^{-1/3+1}}{-1/3+1} \right]_c^9$$

$$= \lim_{c \to 1^+} \frac{(9-1)^{2/3} - (c-1)^{2/3} \to 0}{2/3} = \frac{3}{2} \cdot \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = \frac{3}{2} \cdot 4 = 6$$

Esercizio 4

[4 punti]

Studiare la convergenza del limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2-y^2)}{x^2+y^2} =: \ell$$

Risoluzione

Poniamo $y = mx \Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2 - m^2x^2)}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin((1-m^2)\cdot x^2)}{(1+m^2)\cdot x^2}$$

$\sim (1-m^2)x^2$ per $x \to 0$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1-m^2)\cancel{x^2}}{(1+m^2)\cancel{x^2}} = \frac{1-m^2}{1+m^2}$$

dipende da $m \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \ell$ non esiste!

Esercizio 5

[6 punti]

Studiare la funzione $f(x) = e^{2x} - 3e^x + 2$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

• dominio : tutto $\mathbb{R}$

• $f(0) = e^0 - 3 \cdot e^0 + 2 = 0$

• zeri: N.B. $e^{2x} = (e^x)^2$. Poniamo $e^x =: t \Rightarrow$

$f(x) = t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = t_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4\cdot 2}}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$

cioè $e^x = t = 2 \Leftrightarrow x = \ln(t) = \ln(2)$

$e^x = t = 1 \Leftrightarrow x = \ln(t) = \ln(1) = 0$

Quindi: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 =: x_0$ opp. $x = \ln(2) =: x_1$

• $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{e^{2x}}_{\to +\infty} \cdot (1 - \underbrace{3e^{-x}}_{\to 0} + \underbrace{2e^{-2x}}_{\to 0}) = +\infty(1 - 0 + 0) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 - 3 \cdot 0 + 2 = 2 \Rightarrow y = 2$ asint. orizzontale

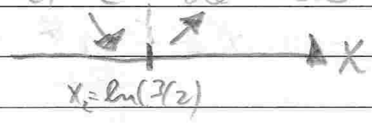
• $f'(x) = 2e^{2x} - 3e^x > 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{2x}}_{>0\,\forall x} \cdot (2 - 3e^{-x}) > 0$

$\Leftrightarrow e^{-x} < \frac{2}{3} \Leftrightarrow -x < \ln(\frac{2}{3})$

$\Leftrightarrow x > -\ln(2/3) = \ln(3/2)$

Quindi $f(x)$ è crescente per $x > \ln(3/2)$ e decrescente per $x < \ln(3/2)$

Inoltre, $f'(\ln(3/2)) = 0$



$\Rightarrow x_2 = \ln(3/2)$ è un pto di min. locale

• Grafico