Analisi Matematica 1, Scritto 1-B. Durata della prova: 2 ore **30.6.09**

Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola: .... **Corso di Laurea:** ....

Domanda 1

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di convergenza per una serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$.

(ii) Verificare se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{(-1)^n \cdot \frac{e^{\sin(n)}}{n^2}}_{=: a_n}$ converge.

Risposta

(i) Sia $S_n := a_0 + a_1 + \dots + a_n$. Allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge alla somma $S \in \mathbb{R}$ se $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$.

(ii) Visto che $\sin(n) \leq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ segue $|a_n| \leq \frac{e^1}{n^2}$. Inoltre $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge (assolutamente) per il criterio del confronto.

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Enunciare il teorema degli zeri.

(ii) Sia $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ un polinomio di grado pari tale che $a_0 < 0$, $a_n > 0$. Dimostrare che $P(x)$ ammette una radice positiva ed una negativa.

Risposta

(i) Se $f \in C[a,b]$ con $f(a)\cdot f(b) < 0$, allora $\exists\, c \in (a,b)$ con $f(c) = 0$

(ii) $P(0) = a_0 < 0$ e $\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n \overset{n \text{ pari},\ a_n>0}{=} +\infty$

$\Rightarrow \exists\, x_0 < 0$ e $x_1 > 0$ t.c. $P(x_0) > 0$ e $P(x_1) > 0$

$\overset{(i)}{\Rightarrow} \exists\, c_0 \in (x_0, 0)$ e $c_1 \in (0, x_1)$ t.c. $P(c_0) = 0 = P(c_1)$

Esercizio 1 [3 punti]

$= f(n)$ per $f(x) := \frac{x}{x^2+9}$

Dato l'insieme $D = \{\frac{n}{n^2+9} : n \in \mathbb{N}\}$, allora

$= a_n$

[a] sup $= +\infty$, inf $= 0$

~~[b]~~ max $= 1/6$, min $= 0$

[c] sup $= 1/6$, inf $= 0$

[d] sup $= 1/6$, inf $= -\infty$

Risoluzione

$f'(x) = -\frac{x^2-9}{(x^2+9)^2} \Rightarrow f(x)$ è crescente su $[0,3]$ e decrescente su $[3,+\infty) \Rightarrow \max D = f(3) = 1/6$, $\inf D = \min\{a_0, \lim_{n\to\infty} a_n\} = \min\{0,0\} = 0 = \min D$

Esercizio 2 [3 punti]

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{q^n} = \left(\frac{1}{q}\right)^n$

[a] converge per $|q| < 1$

~~[b]~~ converge per $|q| > 1$

[c] non converge mai

[d] converge per $|q| > 0$

Risoluzione

La serie converge $\Leftrightarrow \left|\frac{1}{q}\right| < 1 \Leftrightarrow |q| > 1$

Esercizio 3 [4 punti]

Siano f, g due funzioni tali che $f + g$ é derivabile in $x = 0$. Allora

[a] f e g sono derivabili in $x = 0$

~~[b]~~ Esiste finito $\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0) + g(h) - g(0)}{h}$

[c] f e g sono continue in $x = 0$

[d] Nessuna delle risposte precedenti é vera

Risoluzione

Il limite in b) rappresenta il rapporto incrementale di $f+g$ in $x_0 = 0$ che per definizione della derivata converge.

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x - \sin^2(\sqrt{x}) - \sin^2(x)}{x^2} = -\frac{2}{3}$$

Risoluzione

- $\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + o(t^4) \Rightarrow \sin^2(t) = \left(t - \frac{t^3}{6} + o(t^4)\right)^2$

$$= t^2 - 2\frac{t^4}{6} + o(t^4) = t^2 - \frac{t^4}{3} + o(t^4)$$

$t = \sqrt{x}$

$$\Rightarrow\ = x - \frac{x^2}{3} + o(x^2) \quad (x \to 0)$$

- $\sin(x) = x + o(x^2) \Rightarrow \sin^2(x) = (x + o(x^2))^2$

$$= x^2 + o(x^2) \quad (x \to 0).$$ Quindi

$$\frac{x - \sin^2(\sqrt{x}) - \sin^2(x)}{x^2} = \frac{\cancel{x} - \cancel{x} + \frac{x^2}{3} - x^2 + o(x^2)}{x^2}$$

$$= \frac{\frac{-2}{3}x^2 + o(x^2)}{x^2} \sim \frac{-\frac{2}{3}x^2}{x^2} = -\frac{2}{3} = \text{limite}$$

Esercizio 5

[4 punti]

Dire se l'integrale improprio $\int_1^\infty \underbrace{\left(1 - \cos(\frac{1}{x})\right)}_{= f(x) \sim \frac{1}{2x^2} \text{ per } x \to +\infty} dx$ converge.

Risoluzione

$f \in C[1, +\infty)$, inoltre $1 - \cos(t) \sim \frac{t^2}{2}$ per $t \to 0$, quindi con $t := \frac{1}{x} \to 0$ per $x \to +\infty$ segue $f(x) \sim \frac{1}{2x^2}$ per $x \to +\infty$.

Quindi

$\int_1^{+\infty} (1 - \cos(\frac{1}{x}))\, dx$ converge $\Leftrightarrow$ $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ converge. Visto che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$ e $2 > 1$, l'integrale converge!

Esercizio 6

[4 punti]

Studiare la funzione $f(x)=\sqrt{\frac{x^2(x-1)}{x+1}}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

Visto che $\sqrt{x^2}=|x|$ segue $f(x)=|x|\cdot\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

- CE: $\frac{x-1}{x+1}\geq 0 \iff \begin{cases} x\geq 1 \text{ opp} \\ x<-1\end{cases}$
- zeri: $f(x)=0 \iff x-1=0 \iff x=1$
- Segno: $f(x)\geq 0 \ \forall x\in C.E.$
- asintoti: $\lim_{x\to -1^-} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to 1^+} f(x)=0=f(1)$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$.

$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\pm 1$, $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty} x\cdot\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-1\right)$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\left(\frac{x-1}{x+1}-1\right)}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\left(\frac{\cancel{x}-1-\cancel{x}-1}{x+1}\right)}{\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1\right)\to 2}=-1$.

Similmente: $\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)=+1 \Rightarrow y=\begin{cases}x-1\\-x+1\end{cases}$ Sono asintoti obliqui

- $f'(x)=\frac{x\cdot(x^2+x-1)}{\sqrt{\frac{x^2(x-1)}{x+1}}\cdot(x+1)^2}=0 \iff x=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$

$P_0=\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}, \frac{1}{4}\frac{(1+\sqrt{5})^2\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{5}-1}}\right)$ è un pto. di min loc.