Analisi Matematica (1), Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore 30.1.15

Firma: ....

Cognome .... Nome .... A.A. ....

Matricola .... Corso di Laurea ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

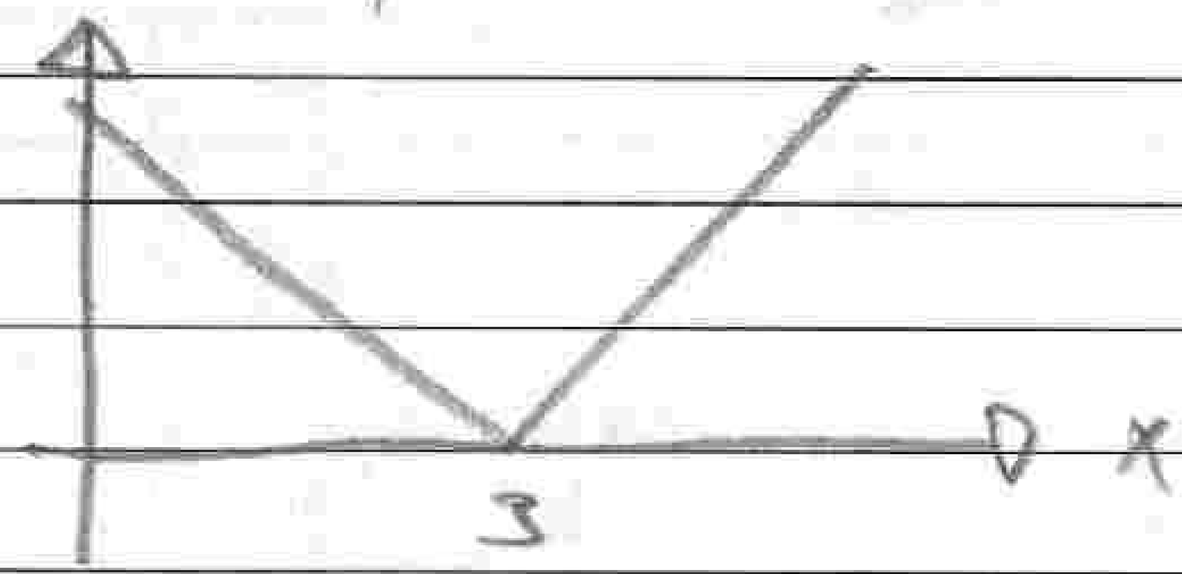
(i) Dare la definizione di continuità in $x_0 \in \mathbb{R}$ per una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Dire se esiste una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che è continua ma non derivabile in $x_0 = 3$. Giustificare la risposta (anche graficamente).

Risposta

(i) cfr. appunti

(ii) Sì, p.e. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x-3|$



Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema degli zeri.

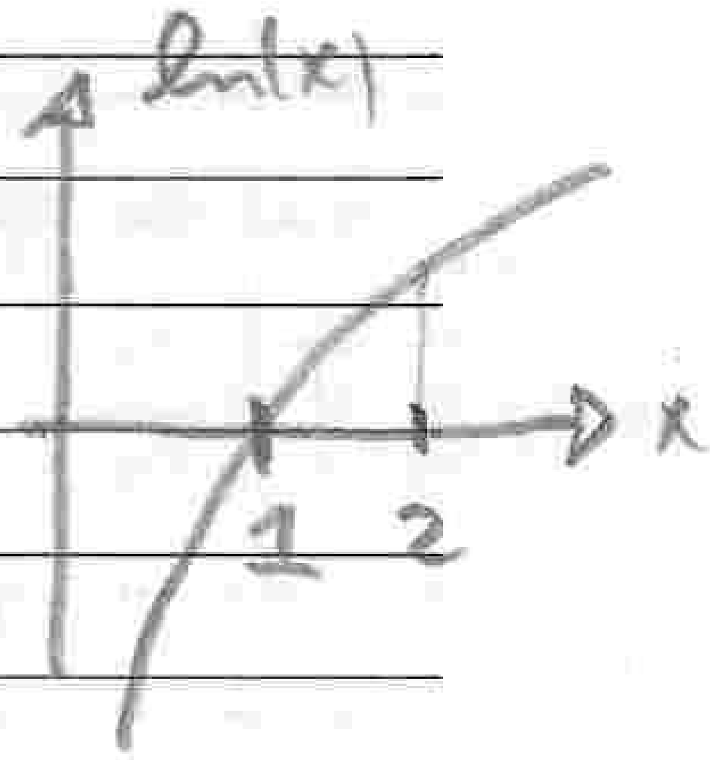
(ii) Verificare che la funzione $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(\cos(x) + e^{-x})$ ammette almeno uno zero.

Risposta

(i) cfr. appunti

(ii) $f(0) = \ln(\overbrace{\cos(0)}^{1} + \overbrace{e^{-0}}^{1}) = \ln(2) > 0$

$f(1) = \ln(\overbrace{\cos(\pi/2)}^{=0} + e^{-\pi/2}) = -\pi/2 < 0$



Inoltre f è continua $\xRightarrow{\text{t.d.z.}}$ f ammette uno zero in $[0, \pi/2]$.

Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \boxed{\frac{e^x - \cos(x) - \ln(1+x)}{\sin^2(x)}} =: h(x)$$

Risoluzione

• $\sin(x) \sim x \Rightarrow \sin^2(x) \sim x^2$ per $x \to 0$

$\Rightarrow$ numeratore da sviluppare fino al 2° ordine:

• $e^x - \cos(x) - \ln(1+x)$

$$= \cancel{1} + \cancel{x} + \frac{x^2}{2} - \left(\cancel{1} - \frac{x^2}{2!}\right) - \left(\cancel{x} - \frac{x^2}{2}\right) + o(x^2)$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + o(x^2) = \frac{3}{2}x^2 + o(x^2) \sim \frac{3}{2}x^2 \quad \text{per } x \to 0$$

princ. di sostituz.

$$\Rightarrow h(x) \sim \frac{3/2\, x^2}{x^2} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} h(x) = 3/2$$

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare l'integrale definito

$$I := \int_1^e \overbrace{x \cdot \ln(x^2)}^{2x\ln(x)}\, dx$$

Risoluzione

$$I = \int_1^e \underbrace{2x}_{f'} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{g}\, dx \overset{\text{i.p.p.}}{=} \underbrace{x^2}_{f} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{g}\Big|_1^e - \int_1^e \overbrace{\underbrace{x^2}_{f} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'}}^{=x}\, dx$$

$$= \left[x^2 \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{2}\right]_1^e = \left[x^2\left(\ln(x) - \frac{1}{2}\right)\right]_1^e$$

$$= e^2\left(\ln(e) - \frac{1}{2}\right) - 1^2\left(\underbrace{\ln(1)}_{=0} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= e^2\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{e^2+1}{2}$$

Esercizio 3

[4 punti]

Calcolare la derivata direzionale $D_v f(1,-1)$ per $f(x,y) = xy^2 - 1$ e il versore $v = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Risoluzione

Applichiamo il teorema del gradiente:

$\text{grad} f(x,y) = (y^2, 2xy) \Rightarrow$

$\text{grad} f(1,-1) = (1, -2) \Rightarrow$

$D_v f(1,-1) = (1,-2) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2} - \sqrt{3}}}$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - \overbrace{(x+y)\cdot(x-y)}^{=x^2-y^2} + y^4}{x^2+y^2}.$$

Risoluzione

Poniamo $y = m \cdot x$ per $m \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\lim_{x\to 0} \frac{x^4 + x^2 - m^2x^2 + m^4 \cdot x^4}{x^2 + m^2x^2} =$

$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + 1 - m^2 + m^4 \cdot x^2}{1+m^2} = \frac{1-m^2}{1+m^2}$: dipende da m

$\Rightarrow$ il limite $\lim_{(x,y)\to 0} \ldots$ <u>non</u> esiste.

Esercizio 5

[6 punti]

Trovare il dominio, eventuali zeri, asintoti, intervalli di monotonia e punti di estremo locale della funzione $f(x) = (2x^2 - 3x) \cdot e^{-x}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

- dominio: tutto $\mathbb{R}$

- $f(x) = 0 \underset{(e^{-x} \neq 0\ \forall x)}{\Leftrightarrow} 2x^2 - 3x = 0 = x \cdot (2x-3) \Leftrightarrow x = \begin{cases} 0 & \text{opp.} \\ 3/2 \end{cases}$

Quindi $x_0 = 0$ e $x_1 = 3/2$ sono gli zeri di f.

- asintoti: $\circ \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-3x}{e^x} = 0$ (limite notevole opp. applicare 2 volte l'Hospital)

$\circ \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x^2-3x \cdot \lim_{x\to-\infty} e^{-x}$

$= +\infty \cdot +\infty = +\infty$

$\circ \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \Rightarrow$ non esiste asintoto obl.

Quindi $y = 0$ è un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.

- Studio f': $f'(x) = (4x-3)e^{-x} + (2x^2-3x)e^{-x} \cdot (-1)$

$= (-2x^2+7x-3) \cdot e^{-x}$

$\Rightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2+7x-3 = 0$

$\Leftrightarrow x = x_{2,3} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2-4\cdot 2\cdot 3}}{-2\cdot 2} = \frac{-7\pm 5}{-4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ 3 \end{cases}$

monotonia: $e^{-x} > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

$-2x^2+7x-3$: $-$ $\frac{1}{2}$ $+$ 3 $-$ $\Rightarrow f$: $\searrow$ $\frac{1}{2}$ $\nearrow$ 3 $\searrow$

$\Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}$ è un pto. di min. loc., $x_3 = 3$ è un pto. di max. loc.

- Grafico