Analisi Matematica (1), Scritto 1-B. Durata della prova: 2 ore 30.1.15

Firma: ....

Cognome .... Nome .... A.A. ....

Matricola .... Corso di Laurea ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

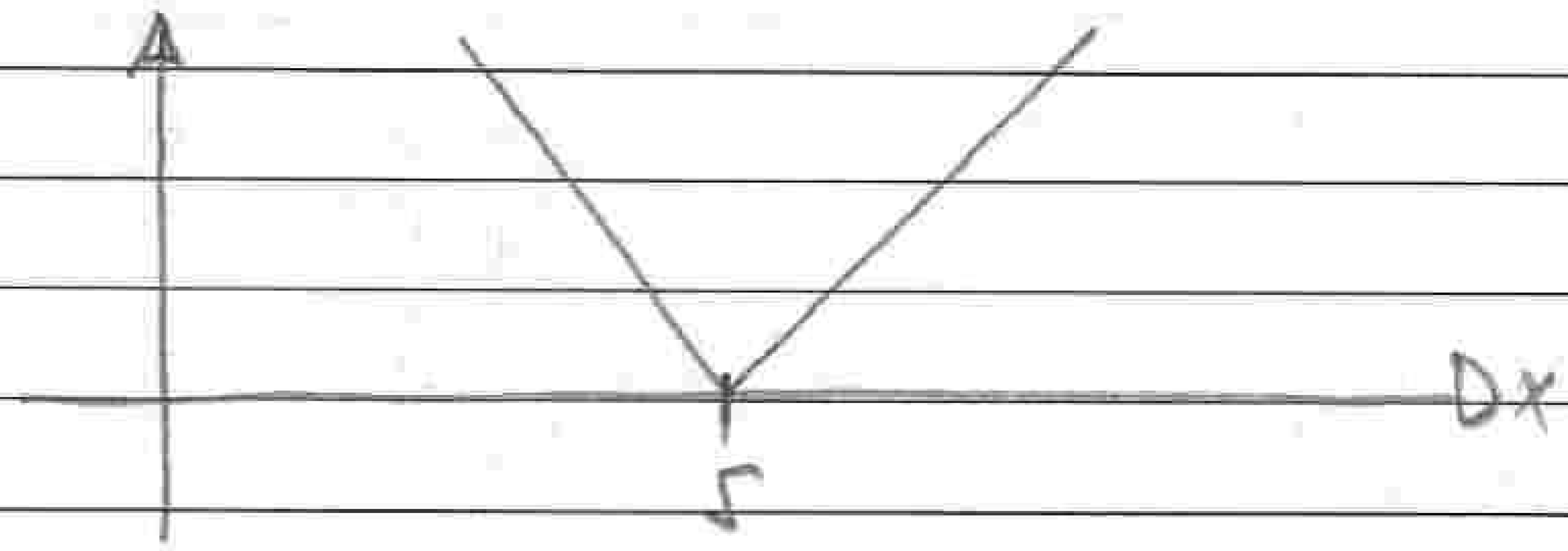
(i) Dare la definizione di continuità in $x_0 \in \mathbb{R}$ per una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Dire se esiste una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che è continua ma non derivabile in $x_0 = 5$. Giustificare la risposta (anche graficamente).

Risposta

(i) Cfr. appunti

(ii) Sì, p.e. $f(x) = |x-5|$



Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema degli zeri.

(ii) Verificare che la funzione $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(e^{x-1} + \sin(x))$ ammette almeno uno zero.

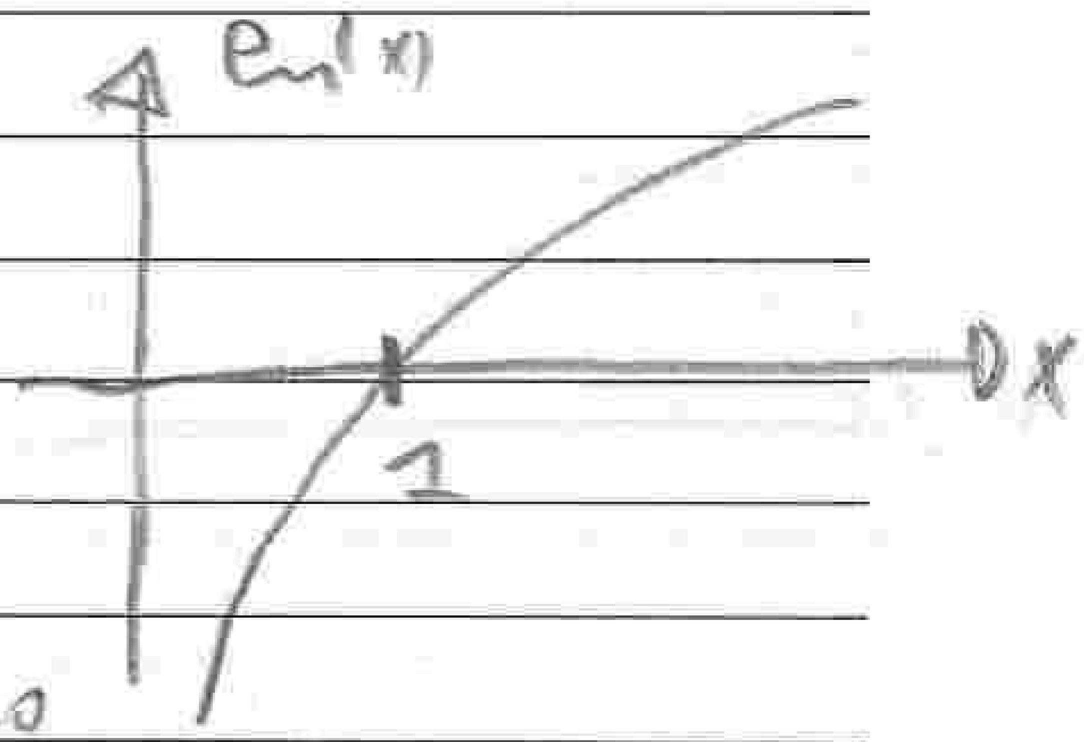
Risposta

(i) Cfr. appunti

(ii) $f(0) = \ln(e^{-1} + \overset{=0}{\sin(0)}) = -1 < 0$

$f(\frac{\pi}{2}) = \ln(\underbrace{e^{\pi/2-1} + 1}_{>1}) > 0$

Inoltre f è continua $\Rightarrow$ f ammette uno zero in $[0, \pi/2]$.



Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to 0} \boxed{\frac{\cos(x) + \sin(x) - e^x}{\ln(1 + x^2)}} =: h(x)$$

Risoluzione

- $\ln(1+x^2) \sim x^2$ per $x \to 0$ $\Rightarrow$

numeratore da sviluppare fino al 2° ordine

- $\cos(x) + \sin(x) - e^x =$

$$= \cancel{1} - \frac{x^2}{2!} + \cancel{x} - \left(\cancel{1} + \cancel{x} + \frac{x^2}{2}\right) + o(x^2)$$

$$= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} + o(x^2) = -x^2 + o(x^2) \sim -x^2 \quad \text{per } x \to 0$$

Principio di sostituzione $\Rightarrow$ $h(x) \sim \dfrac{-x^2}{x^2} = -1$ $\Rightarrow$

$$\lim_{x \to 0} h(x) = -1$$

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare l'integrale definito

$$\int_1^e x^2 \cdot \ln(x)\, dx$$

Risoluzione

$$\int_1^e \underbrace{x^2}_{f'} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{g}\, dx \overset{\text{i.p.p.}}{=} \underbrace{\frac{x^3}{3}}_{f} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{g}\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x}\, dx$$

$$\frac{x^2}{3}$$

$$= \frac{e^3}{3} \cdot \underbrace{\ln(e)}_{=1} - 0 - \frac{x^3}{9}\Big|_1^e = \frac{e^3}{3} - \left(\frac{e^3}{9} - \frac{1}{9}\right)$$

$$= \frac{2}{9} e^3 - \frac{1}{9} = \frac{2e^3 - 1}{9}$$

Esercizio 3

[4 punti]

Calcolare la derivata direzionale $D_v f(-1,1)$ per $f(x,y) = xy^2 + 1$ e il versore $v = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Risoluzione

Applichiamo il teorema del gradiente:

$\text{grad} f(x,y) = (y^2, 2xy) \Rightarrow \text{grad} f(-1,1) = (1,-2) \Rightarrow$

$D_v f(-1,1) = \text{grad} f(-1,1) \cdot \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= (1,-2) \cdot \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2} - \sqrt{3}$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^3 + (x-y)\cdot(x+y)}{x^2} =: f(x,y).$$

Risoluzione

Poniamo $y = mx$ per $m \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 + m^3x^3 + x^2 - m^2x^2}{x^2}$

$= \lim_{x\to 0} x + m^3x + 1 - m^2 = 1 - m^2$: dipende da m

$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ non esiste.

Esercizio 5

[6 punti]

Trovare il dominio, eventuali zeri, asintoti, intervalli di monotonia e punti di estremo locale della funzione $f(x) = e^x \cdot (3x - 2x^2)$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

- dominio: tutto $\mathbb{R}$ $\quad [\, e^x \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}\,]$ $\qquad$ zeri di f

- $f(x) = 0 \iff 3x - 2x^2 = x \cdot (3 - 2x) = 0 \iff x = \begin{cases} 0 & \text{opp.} \\ 3/2 \end{cases}$

- asintoti:
  - $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^x \cdot \lim_{x \to +\infty} 3x - 2x^2 = +\infty \cdot (-\infty) = -\infty$
  - $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \Rightarrow$ non esiste asint. obl. per $x \to +\infty$
  - $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x - 2x^2}{e^{-x}} = 0$ (limite notevole opp. applicare 2 volte l'Hospital)

  $\Rightarrow y = 0$ è un asintoto orizzontale per $x \to -\infty$

- Studio di f': $f'(x) = e^x(3x - 2x^2) + e^x(3 - 4x)$
  $= e^x(-2x^2 - x + 3)$

  $f'(x) = 0 \iff -2x^2 - x + 3 = 0$

  $\iff x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2 \cdot 3}}{-2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 5}{-4} = \begin{cases} -3/2 \\ 1 \end{cases}$

  monotonia: $e^x > 0$ sempre

  $-2x^2 - x + 3$: $\quad - \quad (-3/2) \quad + \quad (1) \quad -$ $\quad \Rightarrow f$: $\searrow \ (-3/2) \ \nearrow \ (1) \ \searrow$

  $\Rightarrow x = -3/2$ è un pto. di min. loc., $x = 1$ è un pto. di max locale.

Grafico: