Analisi Matematica. Durata della prova: 2 ore **31.1.23**

Cognome ..... **Nome** .....

Matricola ..... **Corso di Laurea:** Informatica

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di convergenza al limite $l \in \mathbb{R}$ di una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) Studiare la convergenza della successione $a_n := n - \sqrt{n^2+n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Risposta

(i) $\lim_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$|l - a_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

(ii) $a_n = \dfrac{(n-\sqrt{n^2+n})\cdot(n+\sqrt{n^2+n})}{n+\sqrt{n^2+n}} = \dfrac{\cancel{n^2} - (\cancel{n^2}+\cancel{n})}{\cancel{n}\cdot(1+\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}_{\to 1})}$ $\quad 1 \quad 1$

$\to \dfrac{-1}{1+1} = -\dfrac{1}{2}$

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema di Rolle.

(ii) Calcolare i punti critici della funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := x \cdot \ln(x)$.

Risposta

(i) Se $f \in C[a,b]$ è derivabile in (a,b) e $f(a) = f(b)$ allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c. $f'(c) = 0$.

(ii) • $x > 0$ è un punto critico se $f'(x) = 0$.

• $f'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1 \overset{!}{=} 0$

$\iff \ln(x) = -1 \iff x = e^{\ln(x)} = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

Quindi $x = \frac{1}{e}$ è l'unico punto critico di f.

Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x\cdot\cos(x)}{\sin(x)\cdot\big(1-\cos(x)\big)} =: \ell$$

Risoluzione

- $\sin(x) \sim x$ e $1-\cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$ per $x \to 0$

P.d.S.

$\Rightarrow \sin(x)\cdot(1-\cos(x)) \sim x\cdot\frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{2}$ per $x\to 0$

$\Rightarrow$ numeratore da sviluppare fino al 3° ordine.

- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \Rightarrow x\cdot\cos(x) = x - \frac{x^3}{2} + \underbrace{o(x^4)}_{=o(x^3)}$

$\Rightarrow \sin(x) - x\cdot\cos(x) = \cancel{x} - \frac{x^3}{6} - \cancel{x} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$

$= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)x^3 + o(x^3) = \frac{2}{6}\cdot x^3 + o(x^3) \sim \frac{1}{3}x^3$ per $x\to 0$

P.d.S

$\Rightarrow \frac{\sin(x) - x\cdot\cos(x)}{\sin(x)\cdot(1-\cos(x))} \sim \frac{\frac{1}{3}\cancel{x^3}\,1}{\frac{1}{2}\cancel{x^3}\,1} = \frac{2}{3} = \ell$ per $x\to 0$

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare l'integrale definito

$$I := \int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$$

Risoluzione

Sost: $\sqrt{x} = t \Leftrightarrow x = t^2$

$\Rightarrow$ • $\frac{dx}{dt} = 2t \Rightarrow dx = 2t\cdot dt$

• $x=0 \Rightarrow t = \sqrt{0} = 0$, $x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{1} = 1$.

$\Rightarrow I = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\cdot 2t\,dt = 2\cdot\int_0^1 \frac{t+1-1}{t+1}\,dt$

$= 2\cdot\int_0^1 1 - \frac{1}{t+1}\,dt = 2\cdot\left[t - \ln(t+1)\right]_0^1$

$= 2\cdot\big(1 - \ln(1+1) - 0 + \ln(0+1)\big)$

$= \underline{\underline{2 - 2\cdot\ln(2)}} = 2 - \ln(4)$

Esercizio 3

[4 punti]

Calcolare la derivata direzionale $D_v f(3,5)$ per $f(x,y) = \dfrac{x \cdot y^2}{1+x^2}$ e il versore $v = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Risoluzione

- $f_x(x,y) = \dfrac{(1+x^2)\cdot y^2 - 2x \cdot x \cdot y^2}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f_x$ continua e

$$f_x(3,5) = \frac{(1+3^2)\cdot 5^2 - 2\cdot 3^2 \cdot 5^2}{(1+3^2)^2} = \frac{10\cdot 25 - 18\cdot 25}{10^2}$$

$$= \frac{-8\cdot 25}{100} = \frac{-200}{100} = -2$$

$f_y(x,y) = \dfrac{2x\cdot y}{1+x^2} \Rightarrow f_y$ continua e

$$f_y(3,5) = \frac{2\cdot 3\cdot 5}{10} = 3$$

$\Rightarrow$ (per il teorema del gradiente)

$$D_v f(3,5) = -2\cdot\frac{3}{5} + 3\cdot\frac{4}{5} = \frac{-6+12}{5} = \frac{6}{5}$$

Esercizio 4

[4 punti]

Studiare la convergenza del limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(1-e^{3x})\cdot\ln(1-2y)}{2x^2+3y^2} =: f(x,y)$$

Risoluzione

Ponendo $y = m\cdot x$ segue $\quad -3x \quad -2m\cdot x \quad$ per $x\to 0$

$$\lim_{x\to 0} f(x, m\cdot x) = \frac{(1-e^{3x})\cdot\ln(1-2\cdot m x)}{2x^2+3\cdot m^2\cdot x^2}$$

$$= \frac{(-3x)\cdot(-2mx)}{x^2\cdot(2+3m^2)} = \frac{6m\cdot \cancel{x^2}\,1}{\cancel{x^2}\,1\cdot(2+3m^2)}$$

$$= \frac{6m}{2+3m^2} \quad \text{dipende da } m\in\mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ il limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ <u>non</u> esiste.

Esercizio 5 **[6 punti]**

Trovare il dominio, eventuali zeri, asintoti e punti di estremo locale della funzione

$$f(x) = \left(2x^2 - 5x + 2\right) \cdot e^x$$

e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

- Dominio $D = \mathbb{R}$.
- Zeri: $f(x) = 0 \iff 2x^2 - 5x + 2 = 0$ (visto che $e^x \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$)

$$\iff x = x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm \overbrace{\sqrt{25-16}}^{=3}}{4} = \begin{cases} \frac{5+3}{4} = 2 \\ \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi f ha 2 zeri: $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

- Asintoti: • $\lim_{x \to +\infty} f(x) = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty \Rightarrow$ possibilità di un asintoto obl.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 5x + 2}{x} \cdot e^x = +\infty$$

$\Rightarrow$ non esiste un asintoto obliquo per $x \to +\infty$

• $\lim_{x \to -\infty} (x^2 - 5x + 2) \cdot e^x = 0 \Rightarrow y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$.

- Estremi locali: • Gli unici candidati per punti di estremo locale sono i punti critici. Quindi basta studiare la derivata

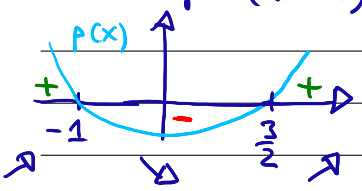
$$f'(x) = (2x^2 - 5x + 2) \cdot e^x + (4x - 5) \cdot e^x$$

$$= (2x^2 - x - 3) \cdot e^x \overset{!}{=} 0 \iff x = x_{3,4} = \frac{1 \pm \overbrace{\sqrt{(-1)^2 + 4 \cdot 2 \cdot 3}}^{=5}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ -\frac{4}{4} = -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow f$ ammette 2 punti critici: $x_3 = \frac{3}{2}$ e $x_4 = -1$.

Inoltre (visto che $e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$) vale

$$\text{segno}(f'(x)) = \text{segno}(p(x)) \quad \text{per } p(x) := 2x^2 - x - 3$$



Quindi $f'(x)$ cambia segno in

$x_3 = \frac{3}{2}$ da "$-$" a "$+$" $\Rightarrow x_3 = \frac{3}{2}$ è un pto. di min. locale

$x_4 = -1$ da "$+$" a "$-$" $\Rightarrow x_4 = -1$ è un pto. di max locale

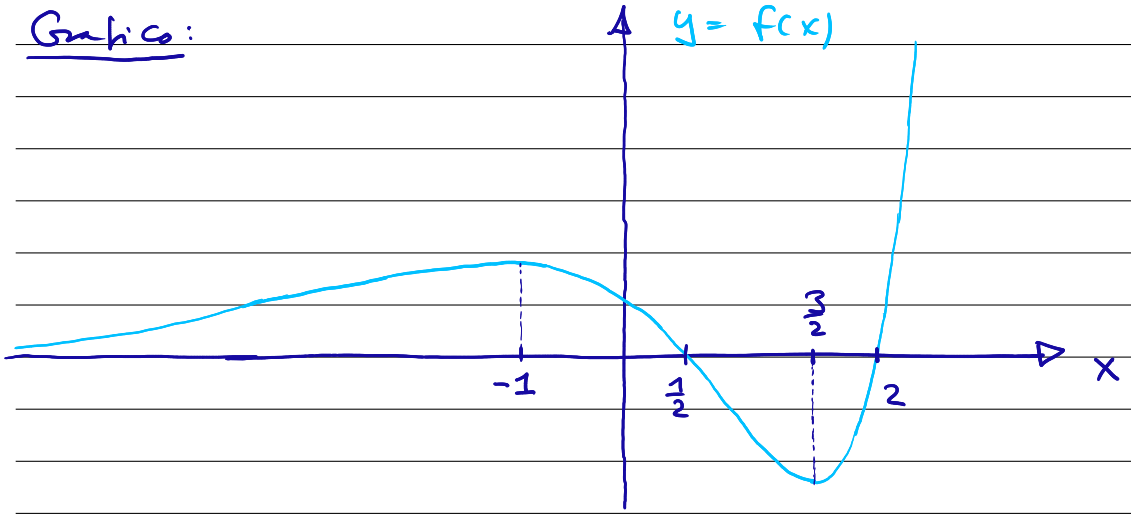



Grafico: