Analisi Matematica (1) **Durata della prova: 2 ore** **4.9.23**

Firma: ....

Cognome .... **Nome** ....

Matricola .... **Corso di Laurea** ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di convergenza di una serie numerica $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$.

(ii) Fare l'esempio di una serie con somma $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = 2$.

Risposta

(i) Sia $S_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$. Allora la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge alla somma $s \in \mathbb{R}$ se $\lim_{n \to +\infty} S_n = s$

(ii) Per esempio $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

(oppure: se $a_0 := 2$ e $a_k = 0$ $\forall k \geq 1$, allora $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = 2+0+0+0+\dots = 2$)

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema degli zeri.

(ii) Verificare che l'equazione $x^2 = \ln(2-x)$ ammette una soluzione nell'intervallo $[0,1]$.

Risposta

(i) Sia $f \in C[a,b]$ con $f(a) \cdot f(b) < 0$. Allora esiste $c \in [a,b]$ tale che $f(c) = 0$.

(ii)
- x è una soluzione di $x^2 = \ln(2-x) \Leftrightarrow f(x) := x^2 - \ln(2-x) = 0$.
- $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ è continua.
- $f(0) = 0^2 - \ln(2-0) = -\ln(2) < 0$
- $f(1) = 1^2 - \ln(2-1) = 1 > 0$

$\overset{(i)}{\Longrightarrow} \exists\, c$ con $f(c) = 0$, cioè $x = c$ è una soluzione.

Esercizio 1 **[5 punti]**

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) + \cosh(x) - e^x}{x \cdot (1 - \cos(x))} =: \ell$$

Risoluzione

- $1 - \cos(x) = 1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim \frac{x^2}{2}$ per $x \to 0$

$\Rightarrow x \cdot (1 - \cos(x)) \sim x \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{2}$ per $x \to 0$

$\Rightarrow$ numeratore da sviluppare fino al $3°$ ordine.

- $\sin(x) + \cosh(x) - e^x = \cancel{x} - \frac{x^3}{6} \cancel{+ 1} + \cancel{\frac{x^2}{2}} - \left(\cancel{1} \cancel{+ x} + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{6}\right) + o(x^3)$

$= -\frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \sim -\frac{x^3}{3}$ per $x \to 0$

P.d.S.

$\Rightarrow \ell = \lim_{x \to 0} \frac{-1/3 \cancel{x^3}}{1/2 \cancel{x^3}} = -\frac{2}{3}$

Esercizio 2 **[5 punti]**

Calcolare, se converge, l'integrale improprio

$$I := \int_0^3 \frac{1 + 2x}{3\sqrt{x}}\, dx$$

Risoluzione

- $I = \lim_{a \to 0^+} \int_a^3 \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{1}{2}}\, dx$

- $\int \frac{1}{3} x^{-1/2} + \frac{2}{3} x^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1/2} \cdot x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\frac{3}{2}} \cdot x^{3/2} + c$

$= \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{9} x^{\frac{3}{2}} + c$

$\Rightarrow I = \lim_{a \to 0} \left[\frac{2}{3} x^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{9} x^{\frac{3}{2}}\right]_a^3$

$= \lim_{a \to 0} \left(\frac{2}{3}\left(\sqrt{3} - \underbrace{\sqrt{a}}_{\to 0}\right) + \frac{4}{9}\left(3^{\frac{3}{2}} - \underbrace{a^{3/2}}_{\to 0}\right)\right)$ per $a \to 0$

$= \frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{4}{9} \cdot 3^{3/2} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} + \frac{4}{\cancel{9}_3} \cdot \cancel{3} \cdot 3^{1/2}$

$= \frac{6}{3} \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot \sqrt{3}$

Esercizio 3

[4 punti]

Calcolare l'equazione del piano tangente $p(x,y)$ al grafico della funzione $f(x,y) = x \cdot \sin\big(x \cdot y^2\big)$ nel punto $(x_0, y_0) = \big(\frac{\pi}{2}, 1\big)$.

Risoluzione

- $p(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$

- $f(x_0,y_0) = \frac{\pi}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1^2\right) = \frac{\pi}{2}$

- $f_x(x,y) = 1\cdot\sin(x\cdot y^2) + x\cdot\cos(x\cdot y^2)\cdot y^2 \Rightarrow$

  $f_x(x_0,y_0) = \sin(\pi/2\cdot 1^2) + \frac{\pi}{2}\cdot\cos(\pi/2\cdot 1^2)\cdot 1^2 = 1$

- $f_y(x,y) = x\cdot\cos(x\cdot y^2)\cdot 2xy = 2x^2\cdot y\cdot\cos(x\cdot y^2) \Rightarrow$

  $f_y(x_0,y_0) = 2\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot 1\cdot\cos(\pi/2\cdot 1) = 0$

Quindi $\underline{p(x,y) = \frac{\pi}{2} + 1\cdot\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare la derivata direzionale $D_v f(3,1)$ per la funzione $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{x+y}{y}\right)$ e il versore $v = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Risoluzione

- La funzione è C^1, cioè differenziabile. Quindi per il teorema del gradiente segue che

$$D_v f(3,1) = f_x(3,1)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) + f_y(3,1)\cdot\frac{4}{5}$$

- $f_x(x,y) = \dfrac{1}{\frac{x+y}{y}}\cdot\dfrac{1}{y} = \dfrac{y}{x+y}\cdot\dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{x+y} \Rightarrow$

  $f_x(3,1) = \dfrac{1}{3+1} = \dfrac{1}{4}$

- $f_y(x,y) = \dfrac{1}{\frac{x+y}{y}}\cdot\dfrac{\cancel{y\cdot(1)} - 1\cdot(x+y)}{y^2} = \dfrac{\cancel{y}^{\,1}}{(x+y)}\cdot\dfrac{-x}{y^{\cancel{2}}} = \dfrac{-x}{(x+y)\cdot y} \Rightarrow$

  $f_y(3,1) = \dfrac{-3}{(3+1)\cdot 1} = -\dfrac{3}{4}$.

Quindi $D_v f(3,1) = \dfrac{1}{4}\cdot\left(\dfrac{-3}{5}\right) - \dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{4}{5} = \dfrac{-3-12}{20}$

$= \dfrac{-15}{20} = \underline{\underline{\dfrac{-3}{4}}}$

Esercizio 5 **[6 punti]**

Trovare il dominio, eventuali zeri, asintoti e punti di estremo locale della funzione $f(x) = \dfrac{x^2-5}{3-x}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

- Dominio: $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$
- Zeri: $f(x) = 0 \iff x^2 - 5 = 0 \iff x = \pm\sqrt{5}$
- asintoti: $\lim_{x\to 3^{\mp}} f(x) = \dfrac{3^2-5}{0^{\pm}} = \dfrac{4}{0^{\pm}} = \pm\infty$

$\Rightarrow x = 3$ è un asintoto verticale

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty \Rightarrow$ possibilità di asintoti obliqui.

$\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2-5}{3x-x^2} = -1 =: m$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - m\cdot x = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2-5}{3-x} + x\cdot\dfrac{3-x}{3-x} = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{\cancel{x^2}-5+3x-\cancel{x^2}}{3-x} = -3 =: q$

$\Rightarrow y = -x-3$ è asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$.

- Estremi Locali: Gli unici candidati per punti di estremo locale sono i punti critici.

$f'(x) = \dfrac{(3-x)\cdot 2x - (-1)\cdot(x^2-5)}{(3-x)^2} = \dfrac{6x-2x^2+x^2-5}{(3-x)^2} = \dfrac{-x^2+6x-5}{(3-x)^2} = 0$

$-x^2+6x-5 =: p(x)$

$(3-x)^2 > 0 \ \forall x \neq 3$

$\iff x = x_{1,2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36-4\cdot(-1)\cdot(-5)}}{2\cdot(-1)} = \dfrac{-6\pm 4}{-2} = \begin{cases} 5 \\ 1 \end{cases}$

Inoltre segno $f'(x)$ = segno di $p(x)$

e $p(x)$ cambia segno in

- $x = 1$ da "$-$" a "$+$" $\Rightarrow$

  $x = 1$ è un punto di minimo locale
- $x = 5$ da "$+$" a "$-$" $\Rightarrow$

  $x = 5$ è un punto di massimo locale

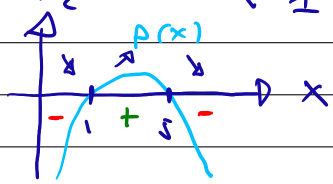

Grafico: