Analisi Matematica 1. Durata della prova: 2 ore 4.07.17

Firma: ....

Cognome .... **Nome** .... **A.A.** ....

Matricola .... **Corso di Laurea** ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di $\lim_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$.

(ii) Dare un esempio di una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 3$.

Risposta

(i) → cfr. appunti

(ii) p.e. $\lim_{n\to+\infty} \frac{3n}{n+1} = 3$

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema degli zeri.

(ii) Controllare se la funzione $f(x) = 10 - 2^x$ si annulla in almeno un punto dell'intervallo $[0, 4]$.

Risposta

(i) → cfr. appunti

(ii)
- f è continua su $[0,4]$
- $f(0) = 10 - 2^0 = 9 > 0$
- $f(4) = 10 - 2^4 = -6 < 0$

per il teor. degli zeri $\Rightarrow \exists c \in (0,4)$ t.c. $f(c) = 0$.

Esercizio 1

[5 punti]

Studiare il carattere della serie

$$S := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{157 + k^3}{1 + 7k + k^4}$$

Risoluzione

- $157 + k^3 \sim k^3$ per $k \to +\infty$
- $1 + 7k + k^4 \sim k^4$ — " —

$\Rightarrow$ (per il principio di sostituzione)

$$\frac{157+k^3}{1+7k+k^4} \sim \frac{k^3}{k^4} = \frac{1}{k}.$$

Inoltre $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ diverge $\Rightarrow$ (per il criterio del confronto asintotico) la serie S diverge a $+\infty$.

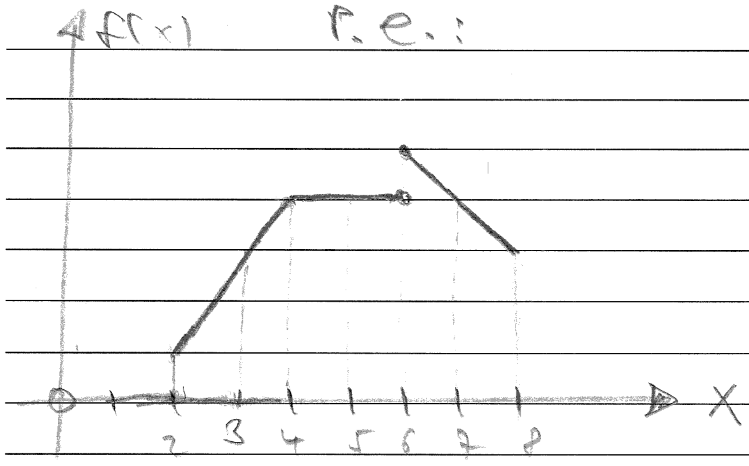
Esercizio 2

[5 punti]

Disegnare il grafico di una funzione $f : [2, 8] \to \mathbb{R}$ con $f'(3) = 1$, con un punto angoloso in $x = 4$, con $f'(5) = 0$, non continua in $x = 6$, e con $f'(7) = -1$.

Risoluzione

r. e.:



Esercizio 3 $\neq y\cdot(1+x^2\cdot y^4)^{1/2}$

[4 punti]

Sia $f(x,y) = y \cdot \sqrt{1+x^2y^4}$. Calcolare $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

Risoluzione

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \cdot \frac{1}{\cancel{2}}(1+x^2\cdot y^4)^{-1/2} \cdot \cancel{2}x\cdot y^4$$

$$= \frac{x\cdot y^5}{\sqrt{1+x^2\cdot y^4}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1\cdot(1+x^2\cdot y^4)^{1/2} + y\cdot\frac{1}{\cancel{2}}(1+x^2\cdot y^4)^{-1/2}\cdot x^2\cdot \overset{2}{\cancel{4}}y^3$$

$$= \sqrt{1+x^2\cdot y^4} + \frac{2x^2\cdot y^4}{\sqrt{1+x^2\cdot y^4}}$$

Esercizio 4

[5 punti]

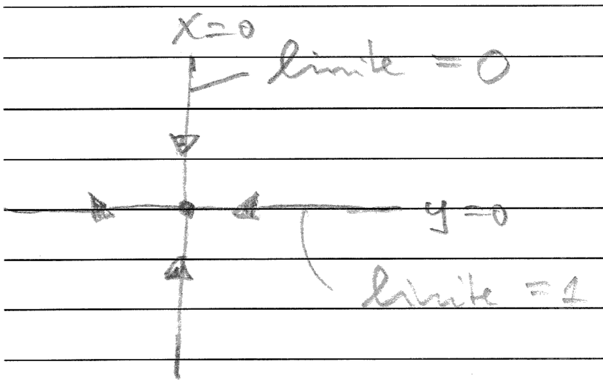
Studiare il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+x^4)}{y^4+\sin(x^4)}$$

Risoluzione

Poniamo $x=0$: $\lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+0^4)}{y^4+\sin(0^4)} = \lim_{y\to 0} 0 = 0 \neq 1$

Poniamo $y=0$: $\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\ln(1+x^4)}^{\sim x^4}}{0^4+\underbrace{\sin(x^4)}_{\sim x^4}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4} = 1$



Visto che i 2 limiti sono diversi, il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+x^4)}{y^4+\sin(x^4)}$ non esiste.

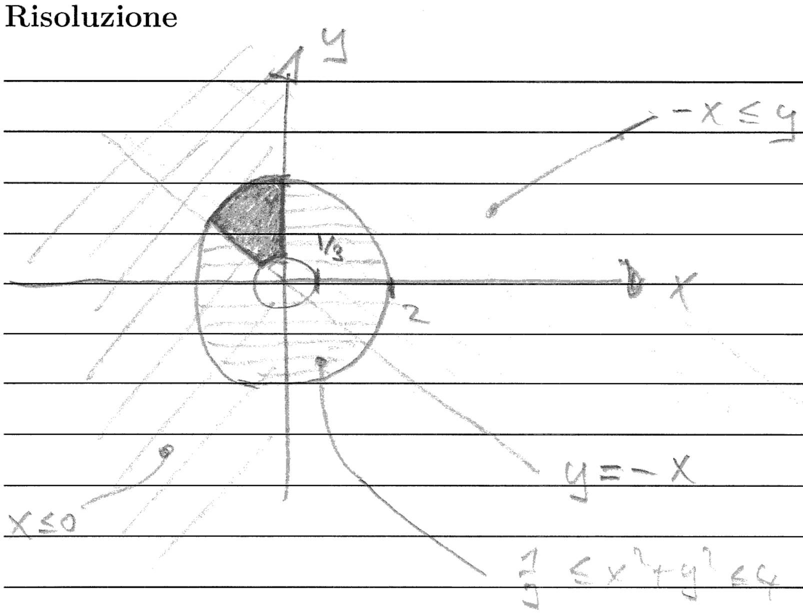
Esercizio 5

[5 punti]

Disegnare l'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{9} \le x^2 + y^2 \le 4,\ x \le 0,\ -x \le y\}$. Calcolare l'integrale

$$I := \iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy.$$

Risoluzione



• D corrisponde a $D' = \underset{\rho}{[\frac{1}{3}, 2]} \times \underset{\vartheta}{[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi]}$

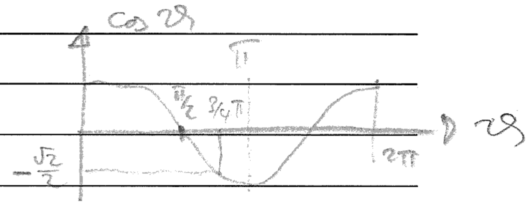
in coordinate polari.

• La funzione integranda è continua

$\Rightarrow$ (per Fubini–Tonelli & camb. di variabili)

$$I = \int_{\rho=1/3}^{2} \int_{\vartheta=\pi/2}^{3/4\pi} \frac{\cancel{\rho} \cdot \sin\vartheta}{\cancel{\rho}} \cdot \rho \, d\vartheta \, d\rho$$

$$= \int_{1/3}^{2} \rho \, d\rho \cdot \int_{\pi/2}^{3/4\pi} \sin\vartheta \, d\vartheta$$



$$= \frac{\rho^2}{2}\Big|_{1/3}^{2} \cdot (-\cos\vartheta)\Big|_{\pi/2}^{3/4\pi} = \frac{2^2 - (\frac{1}{3})^2}{2} \cdot \left(\cos(\tfrac{\pi}{2}) - \cos(\tfrac{3}{4}\pi)\right)$$

$$= \frac{4 - 1/9}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{35}{18} \cdot \sqrt{2}$$