Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore **5.7.10**

Domanda 1

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di convergenza per una successione numerica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) Dare un esempio di una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ irregolare, non limitata.

Risposta

(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge al limite $\ell \in \mathbb{R}$ se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$|\ell - a_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$.

(ii) Per esempio $((-2)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ è irregolare e non limitata

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Enunciare l'assioma della completezza di $\mathbb{R}$.

(ii) Dare un esempio di un insieme $D \subset \mathbb{Q}$ limitato che non ammette estremo superiore in $\mathbb{Q}$.

Risposta

(i) Ogni $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ superiormente limitato ammette estremo superiore.

(ii) Per esempio $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$ è limitato ma non ammette estremo superiore in $\mathbb{Q}$.

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $h(x) = f(x)^{g(x)}$ per $f, g \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R})$ con $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora $h'(x)$ è data da

- ~~a~~ $h(x) \cdot \left(\frac{f'(x)\cdot g(x)}{f(x)} + \ln(f(x)) \cdot g'(x)\right)$
- b $g(x) \cdot \left(f(x)^{g(x)-1}\right)$
- c $g(x) \cdot \left(f(x)^{g(x)-1}\right) \cdot f'(x)$
- d h non è sempre derivabile

Risoluzione

Per definizione, $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\cdot \ln(f(x))}$, quindi per la regola della catena segue

$$h'(x) = \underbrace{e^{g(x)\cdot \ln(f(x))}}_{=h(x)} \cdot \left(g(x)\cdot \ln(f(x))\right)' = h(x)\cdot\left(g(x)\cdot \frac{f'(x)}{f(x)} + g'(x)\cdot \ln(f(x))\right)$$

Esercizio 2

[3 punti]

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \cos(\pi n)$

- a diverge
- ~~b~~ converge
- c è oscillante
- d è infinitesima

Risoluzione

$\cos(\pi n) = (-1)^n \ \forall n \in \mathbb{N}$. Inoltre $(\sin(1/n))_{n \geq 1}$ è decrescente e infinitesima, quindi la serie converge per il criterio di Leibniz. (N.B. La serie non converge assolutamente)

Esercizio 3

[3 punti]

Sia $f \in \mathrm{C}(\mathbb{R})$ tale che $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ per $x \in \mathbb{R}$ è crescente. Allora f è

- a crescente
- b costante
- ~~c~~ non negativa
- d nessuna delle precedente

Risoluzione

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale F è derivabile con $F' = f$. Inoltre vale per il test di monotonia: F è crescente $\Leftrightarrow F' \geq 0$

Quindi risulta $F' = f \geq 0$ cioè c)

Esercizio 4 [4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$q = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} =: a_n$$

Risoluzione

$a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, quindi $(\sqrt[n]{a_n})_{n\geq 1}$ ammette limite q se $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n\geq 1}$ ammette limite q. Inoltre vale $\frac{a_{n+1}}{a_n} =$

$$\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{\cancel{n!}\cdot\cancel{(n+1)}\cdot n^n}{(n+1)^n\cdot\cancel{(n+1)}\cdot\cancel{n!}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$$

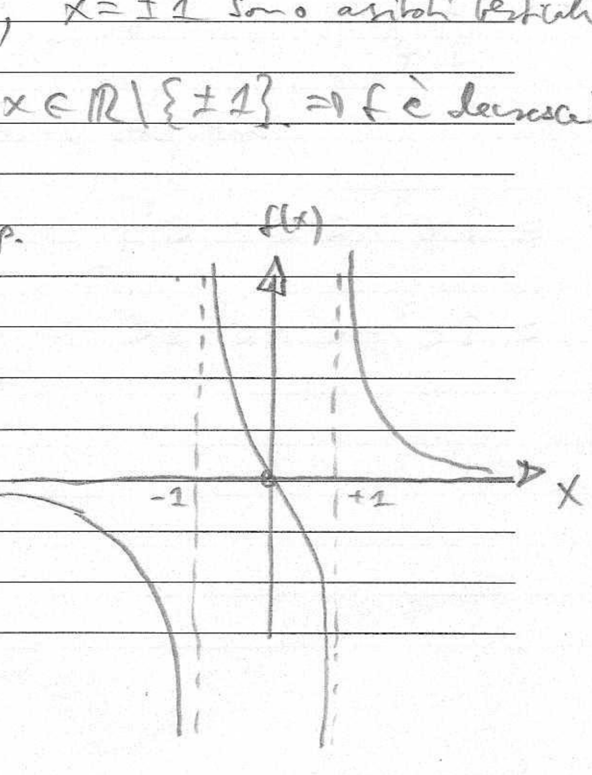
$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e}$$ per $n \to +\infty$. Quindi $q = 1/e$.

Esercizio 5 [4 punti]

Studiare la funzione $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

- Dominio: $x^2 \neq 1 \iff x \neq \pm 1$ cioè Dominio di $f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.
- Simmetrie: f è dispari.
- limiti agli estremi: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to -1^\pm} f(x) = \pm\infty$.
- Zeri: $f(x) = 0 \iff x = 0$
- asintoti: $y = 0$ è un'asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$, $x = \pm 1$ sono asintoti verticali
- $f'(x) = \ldots = \frac{-(1+x^2)}{(x^2-1)^2} < 0 \ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\} \Rightarrow f$ è decrescente
- Segno: $f(x) > 0 \iff \begin{cases} x > 1 \text{ opp.} \\ x \in (-1, 0) \end{cases}$
- Grafico:



$\{(x,y) \mid x \in [1,2],\ \frac{1}{x} \le y \le x\}$

Esercizio 6

[5 punti]

Disegnare il dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1,2],\ xy \ge 1,\ \frac{y}{x} \le 1\}$ e calcolare l'integrale doppio

$$I = \iint_D \frac{y^2}{x}\, dx\, dy. = \frac{47}{72}$$

In alternativa per i soli studenti immatricolati nel 2008/2009:

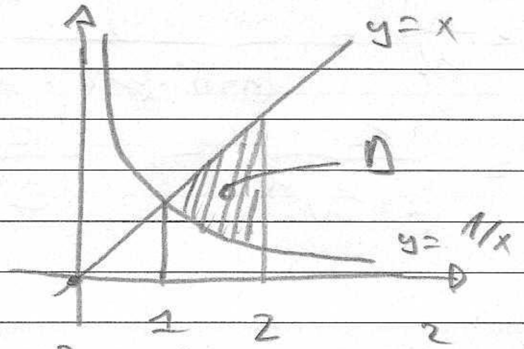
Calcolare l'integrale

$$J = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} e^{\sqrt{2x+3}}\, dx. = e^2$$

Risoluzione

D è y-semplice:

Con Fubini-Tonelli segue



$$I = \int_1^2 \int_{1/x}^{x} \frac{y^2}{x}\, dy\, dx = \int_1^2 \left(\frac{y^3}{3x} \Big|_{y=1/x}^{y=x} \right) dx = \int_1^2 \left(\frac{x^3}{3x} - \frac{(\frac{1}{x})^3}{3x} \right) dx$$

$$\frac{1}{3} \cdot \int_1^2 (x^2 - x^{-4})\, dx = \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^{-3}}{3} \right)\Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{9}\left(2^3 + 2^{-3} - 1^3 - 1^{-3}\right) = \ldots = \frac{47}{72}.$$

$$J = \int_1^2 \underset{f}{t} \cdot \underset{g'}{e^t}\, dt = t \cdot e^t \Big|_1^2 - \int_1^2 1 \cdot e^t\, dt$$

$f \cdot g$

int. per parti

$$= 2 \cdot e^2 - 1 \cdot e - e^t \Big|_1^2 =$$

$$= 2e^2 - \cancel{e} - e^2 + \cancel{e} = e^2$$

Sost: $\sqrt{2x+3} = t \Leftrightarrow$

$2x+3 = t^2 \Leftrightarrow$

$x = \frac{t^2-3}{2} \Rightarrow$

$\frac{dx}{dt} = t \Rightarrow dx = t \cdot dt.$

Inoltre $x = -1 \Rightarrow t = 1$

$x = 1/2 \Rightarrow t = 2$