Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore 5.9.11

Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola: .... **Corso di Laurea:** .... **Canale:** A B C D

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Domanda 1

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di convergenza per una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) Dare un esempio di una successione convergente che non è monotona.

Risposta

(i) cfr. appunti

(ii) $\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Enunciare il Teorema della Media per gli integrali.

(ii) Calcolare il valor medio di $f(x) = \sin(x)$ nell'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Risposta

(i) cfr. appunti

(ii) Se $f \in C[a,b]$, allora $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ è il suo valor medio. Quindi

$$\text{v.m.} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\left(-\cos(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}$$

Esercizio 1

[3 punti]

Se la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifica $0 < \arctan(n) \cdot a_{n+1} = a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

$\boxed{a}$ diverge $\boxed{b}$ converge $\boxed{c}$ è oscillante $\boxed{d}$ non si può dire nulla sulla serie

Risoluzione

Applichiamo il criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\arctan(n)} \to \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} = q < 1$$

$\Rightarrow$ La serie converge

Esercizio 2

[3 punti]

Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ invertibile tale che $f(1) = 3$, $f'(1) = 2$, $f(3) = 5$ e $f'(3) = 7$. Allora

$\boxed{\cancel{a}}$ $(f^{-1})'(5) = \frac{1}{7}$ $\boxed{b}$ $(f^{-1})'(5) = \frac{1}{2}$ $\boxed{c}$ $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{2}$ $\boxed{d}$ $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{3}$

Risoluzione

Se $f \in C^1(\mathbb{R})$ è invertibile, allora $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ dove $y_0 = f(x_0)$. Visto che $f(\underset{x_0}{\underset{\parallel}{3}}) = \underset{y_0}{\underset{\parallel}{5}}$ ciò implica

$$(f^{-1})'(5) = \frac{1}{f'(3)} = \frac{1}{7}$$

Esercizio 3

[3 punti]

Il piano tangente nell'origine al grafico della funzione $f(x, y) = \sin(x) \cdot \cos(y)$ è dato da

$\boxed{\cancel{a}}$ $z = x$ $\boxed{b}$ $z = y$ $\boxed{c}$ $z = \sin(x)\cos(y)$ $\boxed{d}$ non esiste

Risoluzione

L'equazione del piano tangente nel punto (x_0, y_0) è

$$p(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

Qui abb. $(x_0, y_0) = (0,0)$, $f_x(x,y) = \cos(x)\cdot\cos(y)$

$f_y(x,y) = -\sin(x)\cdot\sin(y) \Rightarrow f(0,0) = 0 = f_y(0,0) \Rightarrow$

$f_x(0,0) = 1$

$p(x,y) = x$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0}(\cosh(2x))^{\frac{1}{x^2}}$$

Risoluzione

funz. esponenziale è continua

$$\lim_{x\to0} \cosh(2x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0} e^{\frac{\ln(\cosh(2x))}{x^2}} = e^{\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cosh(2x))}{x^2}}$$

Calcoliamo quindi

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cosh(2x))}{x^2}$$ (= forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$)

$$= \lim_{x\to0}\frac{\frac{\sinh(2x)\cdot 2}{\cosh(2x)}}{2x}$$

$$= \lim_{x\to0}\overbrace{\frac{\sinh(2x)}{2x}}^{\to 1}\cdot\overbrace{\frac{2}{\cosh(x)}}^{\to 2} = 2.$$

Quindi risulta

$$\lim_{x\to0}\cosh(2x)^{\frac{1}{x^2}} = e^2$$

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare un valore approssimativo di $\sqrt{e}$ con un errore minore di $\frac{1}{100}$.

Risoluzione

Utilizziamo la formula di Taylor con resto di Lagrange: se $f\in C^{n+1}[a,b]$, $x, x_0\in[a,b]$ allora

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{=T_n(x)} + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

per un $c\in[a,b]$. Qui scegliamo $f(x)=e^x$, $x=\frac{1}{2}$, $x_0=0$.

$$\Rightarrow \left|e^{\frac{1}{2}} - T_n\left(\tfrac{1}{2}\right)\right| = \frac{e^c}{(n+1)!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \text{ per un } c\in\left[0,\tfrac{1}{2}\right]$$

(e^x è crescente) ($e^x = f^{(n+1)}(x)$)

$$\le \frac{e^{1/2}}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{2^{n+1}} \overset{(e\le 4)}{\le} \frac{1}{(n+1)!\,2^n} \overset{!}{<} \frac{1}{100}.$$

Scegliendo $n=3$ otteniamo $\frac{1}{(3+1)!}\cdot\frac{1}{2^3} = \frac{1}{24\cdot 8} \overset{!}{<} \frac{1}{100}$ che è vero

$\Rightarrow T_3\left(\frac{1}{2}\right)$ è l'appross. cercata

$$= 1 + 1\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad \left(= \frac{79}{48}\right)$$

Esercizio 6

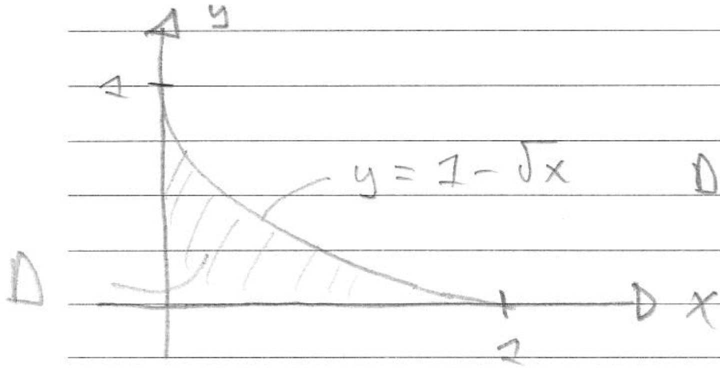
[5 punti]

Disegnare il dominio $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } \sqrt{x} + y \leq 1\}$ e calcolare

$$I = \iint_D (x+2y)\,dx\,dy$$

Risoluzione

$\sqrt{x} + y \leq 1 \iff y \leq 1 - \sqrt{x}$. Graficando:



Quindi D è y-semplice:

$D = \{(x,y) \mid x \in [0,1],\ 0 \leq y \leq 1-\sqrt{x}\}$

Con Fubini-Tonelli risulta:

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-\sqrt{x}} (x+2y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 (xy + y^2)\Big|_0^{1-\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 x\cdot(1-\sqrt{x}) + (1-\sqrt{x})^2\,dx$$

$$= \int_0^1 (x - x^{3/2} + 1 - 2\sqrt{x} + x)\,dx$$

$$= \left[x^2 - \frac{2}{5}x^{5/2} + x - 2\cdot\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1$$

$$= 1 - \frac{2}{5} + 1 - \frac{4}{3} = \frac{15-6+15-20}{15}$$

$$= \frac{4}{15}$$