Cognome: .... Nome: ....

Matricola: .... Corso di Laurea: .... Canale: A B C D

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Domanda 1

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di divergenza a $+\infty$ per una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) Dare un esempio di una successione divergente che non è monotona.

Risposta

(i) cfr. appunti

(ii) $\left((2+(-1)^n)\cdot n\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Enunciare il Teorema della Media per gli integrali.

(ii) Calcolare il valor medio di $f(x) = \cosh(x)$ nell'intervallo $[-1, 1]$.

Risposta

(i) cfr. appunti

(ii) valor medio $= \frac{1}{1-(-1)} \cdot \int_{-1}^{1} \cosh(x)\,dx$

$= \frac{1}{2} \cdot \sinh(x)\Big|_{-1}^{1}$

$= \frac{1}{2}\left(\sinh(1) - \sinh(-1)\right)$

sinh = dispari $\rightarrow$ $= \sinh(1) = \frac{e-\frac{1}{e}}{2}$

Esercizio 1

[3 punti]

Se la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifica $0 < \arctan(n) \cdot a_n = a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

$\boxed{\cancel{a}}$ diverge $\boxed{b}$ converge $\boxed{c}$ è oscillante $\boxed{d}$ non si può dire nulla sulla serie

Risoluzione

Applichiamo il criterio del rapporto:

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \arctan(n) \to \frac{\pi}{2} = q > 1$

$\Rightarrow$ la serie diverge

Esercizio 2

[3 punti]

Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ invertibile tale che $f(1) = 3$, $f'(1) = 2$, $f(3) = 5$ e $f'(3) = 7$. Allora

$\boxed{a}$ $(f^{-1})'(3) = \frac{1}{7}$ $\boxed{\cancel{b}}$ $(f^{-1})'(3) = \frac{1}{2}$ $\boxed{c}$ $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{2}$ $\boxed{d}$ $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{3}$

Risoluzione

Se $f \in C^1(\mathbb{R})$ è invertibile, allora $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

con $y_0 = f(x_0)$. Visto che $\underset{x_0}{f(1)} = \underset{y_0}{3}$ segue

$(f^{-1})'(\underset{y_0}{3}) = \frac{1}{f'(\underset{x_0}{1})} = \frac{1}{2}$.

Esercizio 3

[3 punti]

Il piano tangente nell'origine al grafico della funzione $f(x, y) = \cos(x)\sin(y)$ è dato da

$\boxed{a}$ $z = x$ $\boxed{\cancel{b}}$ $z = y$ $\boxed{c}$ $z = \cos(x)\sin(y)$ $\boxed{d}$ non esiste

Risoluzione

L'equazione del piano tangente nel punto (x_0, y_0) è

$p(x,y) = f(x_0, y) + f_x(x_0, y_0)(x-x_0) + f_y(x_0, y_0)\cdot(y-y_0)$

Visto che $(x_0, y_0) = (0,0)$ risulta $f(x_0, y_0) = 0$,

$f_x(x,y) = -\sin(x)\cdot\sin(y) \Rightarrow f_x(0,0) = 0$

$f_y(x,y) = \cos(x)\cdot\cos(y) \Rightarrow f_y(0,0) = 1$

Quindi $p(x,y) = y$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0}\big(\cos(2x)\big)^{\frac{1}{x^2}}$$

Risoluzione

e^x è continua

$$\lim_{x\to 0} \cos(2x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(\cos(2x))}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(2x))}{x^2}}$$

Inoltre

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(2x))}{x^2} \quad \left(= \text{forma ind. tipo } \frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-\sin(2x)\cdot 2}{\cos(x)}}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0} -\underbrace{\frac{\sin(2x)}{2x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{2}{\cos(x)}}_{\to 2} = -2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \cos(2x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare un valore approssimativo di $\sqrt{e}$ con un errore minore di $\frac{1}{100}$.

Risoluzione

cfr. compito A

Esercizio 6

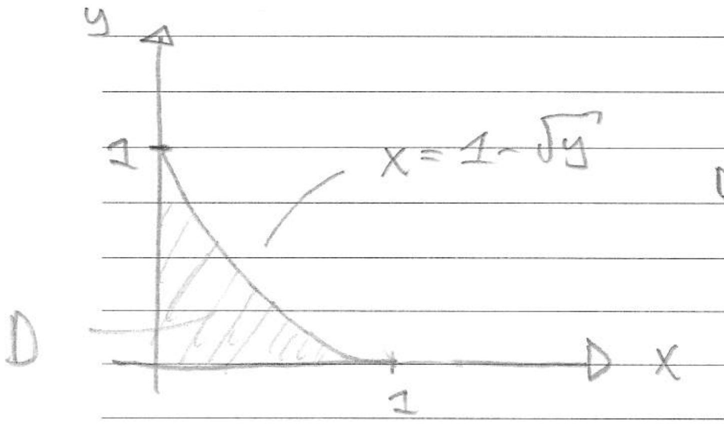
[5 punti]

Disegnare il dominio $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } x + \sqrt{y} \leq 1\}$ e calcolare

$$I = \iint_D (3x + y)\, dx\, dy$$

Risoluzione

$x + \sqrt{y} \leq 1 \iff x \leq 1 - \sqrt{y}$. Grafichiamolo:



Quindi D è x-semplice:

$D = \{(x,y) \mid y \in [0,1],\ 0 \leq x \leq 1 - \sqrt{y}\}$

Con Fubini-Tonelli segue

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-\sqrt{y}} (3x + y)\, dx\, dy = \int_0^1 \left[\frac{3}{2}x^2 + xy\right]_0^{1-\sqrt{y}} dy$$

$$= \int_0^1 \frac{3}{2}(1-\sqrt{y})^2 + (1-\sqrt{y})\cdot y \, dy$$

$$= \int_0^1 \frac{3}{2} - 3\sqrt{y} + \overbrace{\frac{3}{2}y + y}^{=\frac{5}{2}y} - y^{3/2}\, dy$$

$$= \left[\frac{3}{2}y - 3\,\frac{2}{3}y^{3/2} + \frac{5}{4}y^2 - \frac{2}{5}y^{5/2}\right]_0^1$$

$$= \frac{3}{2} - 2 + \frac{5}{4} - \frac{2}{5} = \frac{30 - 40 + 25 - 8}{20}$$

$$= \frac{7}{20}$$