Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore **5.2.20**

Firma: ....

Cognome .... **Nome** .... **A.A.** ....

Matricola .... **Corso di Laurea** ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Enunciare il criterio di Leibniz per le serie numeriche.

(ii) Studiare la convergenza semplice della serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \cdot \sin(\frac{1}{n})$. $=: \mathcal{S}$

Risposta

(i) se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente e infinitesima allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \cdot a_n$ converge

(ii) • $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ è decrescente e $\sin : [0,1] \to \mathbb{R}$ è crescente $\Rightarrow$ $\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n\geq 1}$ è decrescente.

• $\lim_{n\to+\infty} \sin(\frac{1}{n}) = \sin(0) = 0$

$\Rightarrow$ la serie $\mathcal{S}$ converge.

Domanda 2

[4 punti]

(i) Dare la definizione di derivabilità nel punto $x_0 \in \mathbb{R}$ per una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Studiare la derivabilità della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot \sqrt[3]{x}$ nel punto $x_0 = 0$.

Risposta

(i) f è derivabile in x_0 con derivata $f'(x_0)$ se converge il limite $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =: f'(x_0) \in \mathbb{R}$

$\left(\text{oppure } \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)\right)$

(ii)

$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\cdot\sqrt[3]{h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \sqrt[3]{h} = 0$

Quindi f è derivabile in $x_0 = 0$ con derivata $f'(0) = 0$

Esercizio 1 [4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} n \cdot \left(\sqrt{n^2+\pi} - \sqrt{n^2+e}\right) =: a_n$$

Risoluzione

$$a_n = n \cdot \frac{\sqrt{n^2+\pi} - \sqrt{n^2+e}}{\sqrt{n^2+\pi} + \sqrt{n^2+e}} \cdot \left(\sqrt{n^2+\pi} + \sqrt{n^2+e}\right)$$

$$= n \cdot \frac{(n^2+\pi) - (n^2+e)}{\sqrt{n^2+\pi} + \sqrt{n^2+e}} = \cancel{n} \cdot \frac{\pi - e}{\cancel{n} \cdot \left(\sqrt{1+\frac{\pi}{n^2}} + \sqrt{1+\frac{e}{n^2}}\right)}$$

$$\to \frac{\pi - e}{1+1} = \frac{\pi - e}{2} \quad \text{per } n \to +\infty$$

Esercizio 2 [5 punti]

Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^1 x \cdot \sinh(x)\, dx$$

Risoluzione

$$\int_0^1 \underset{f}{x} \cdot \underset{g'}{\sinh(x)}\, dx = \left[\underset{f}{x} \cdot \underset{g}{\cosh(x)}\right]_0^1 - \int_0^1 \underset{f'}{1} \cdot \underset{g}{\cosh(x)}\, dx$$

$$= \cosh(1) - \left[\sinh(x)\right]_0^1 = \cosh(1) - \sinh(1)$$

$$= \frac{e^1 + e^{-1}}{2} - \frac{e^1 - e^{-1}}{2} = \frac{1}{e}$$

Esercizio 3

[4 punti]

Calcolare l'equazione del piano tangente al grafico di $f(x,y) = x \cdot y^2 - x^3 \cdot y^4$ nel punto $(2,1)$.

Risoluzione

- $p(x,y) = f(2,1) + f_x(2,1)\cdot(x-2) + f_y(2,1)\cdot(x-1)$
- $f(2,1) = 2 - 2^3 = 2-8 = -6$
- $f_x(x,y) = y^2 - 3x^2y^4 \Rightarrow f_x(2,1) = 1 - 3\cdot 4 = -11$
- $f_y(x,y) = 2xy - 4x^3y^3 \Rightarrow f_y(2,1) = 2\cdot 2 - 4\cdot 2^3$
  $= 4 - 32 = -28$

Quindi $\underline{p(x,y) = -6 - 11\cdot(x-2) - 28\cdot(y-1)}$

Esercizio 4

[5 punti]

Studiare la continuità, la derivabilità e la differenziabilità in $(0,0)$ della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{(1-e^x)\cdot\ln(1+y)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Risoluzione

- ponendo $x = y$ si ottiene

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{(1-e^x)\cdot\ln(1+x)}{2x^2}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(-1)\cdot 1 = -\frac{1}{2} \neq f(0,0) = 0$$

$\Rightarrow f$ non è continua in $(0,0)$ $\Rightarrow f$ non è differenziabile in $(0,0)$

- $f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$
- $f_y(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$

Quindi f è derivabile in $(0,0)$ con $\operatorname{grad} f(0,0) = (0,0)$

Esercizio 5

[6 punti]

Trovare il dominio, eventuali zeri, asintoti e punti di estremo locale della funzione $f(x) := \frac{x^2-9}{x-5}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

• $D = \mathbb{R}\setminus\{5\}$, $f(x)=0 \iff x^2-9=0 \iff x=\pm 3$

• $\lim_{x\to 5^\pm} f(x) = \frac{25-9}{0^\pm} = \pm\infty \Rightarrow x=5$ asintoto verticale

• $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x^2-9)-(x-5)\cdot x}{x-5}$

$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-9-x^2+5x}{x-5} = 5 \Rightarrow y = x+5$ asintoto obliquo

• $f'(x) = \frac{(x-5)\cdot 2x - 1\cdot(x^2-9)}{(x-5)^2} = \frac{2x^2-10x-x^2+9}{(x-5)^2} = \frac{x^2-10x+9}{(x-5)^2} \overset{!}{=} 0$, $(x-5)^2 > 0 \ \forall x \neq 5$

$\iff x = \frac{10\pm\sqrt{100-4\cdot 9}}{2} = \frac{10\pm 8}{2} = \begin{cases} 9 \\ 1 \end{cases}$. Inoltre, $f'(x)$ cambia

segno in • $x=1$ da "+" a "−" $\Rightarrow x=1$ è un pto. di max locale

• $x=9$ da "−" a "+" $\Rightarrow x=9$ — " — min. locale ⊛

• Inoltre vale $f(0)=\frac{9}{5}$, $f(1)=2$, $f(9)=18$

Grafico: