Analisi Matematica 1. Durata della prova: 2 ore **5.2.24**

Firma: ....

Cognome .... **Nome** ....

Matricola .... **Corso di Laurea:** Ingegneria dell'Informazione

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di convergenza alla somma $s \in \mathbb{R}$ di una serie numerica $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

(ii) Descrivi il comportamento della serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ al variare di $q \in \mathbb{R}$

Risposta

(i) Sia $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$. Allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_k$ converge alla somma $s \in \mathbb{R}$ se $\lim_{n \to +\infty} s_n = s$ e in questo caso si scrive $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = s$.

(ii)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} \in \mathbb{R} & \text{se } |q| < 1 \text{ cioè } q \in (-1,1) \\ +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \text{è irregolare} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

Domanda 2

[4 punti]

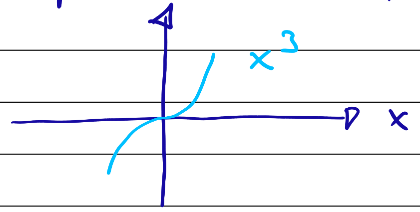
(i) Enunciare il Teorema di Fermat

(ii) Fare l'esempio (anche grafico) di un punto critico che non è un punto di estremo locale

Risposta

(i) Sia $x_0 \in (a,b)$ è un punto di estremo locale di $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Se f è derivabile in x_0, allora $f'(x_0) = 0$, cioè x_0 è un pto. critico di f.

(ii) Sia $f(x) := x^3$ per $x \in [-1,1]$. Allora $f'(x) = 3 \cdot x^2$ e quindi $f'(0) = 0$, cioè $x_0 = 0$ è un punto critico di f. Però, $x_0 = 0$ non è un pto. di estremo locale di f.



Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sqrt{2x}\,)-e^{-x}}{\ln(1+x^2)} =: \ell$$

Risoluzione

• Denominatore: $\ln(1+t) \sim t$ per $t \to 0$, quindi
$\ln(1+x^2) \sim x^2$ per $x \to 0$

• Numeratore: lo sviluppo fino al 2° ordine:

$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + o(t^4) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^4) \xRightarrow{t=\sqrt{2x}}$$

$$\cos(\sqrt{2x}) = 1 - \frac{(\sqrt{2x})^2}{2} + \frac{(\sqrt{2x})^4}{24} + o((\sqrt{2x})^2) = 1 - x + \frac{x^2}{6} + o(x^2)$$

per $x \to 0$.

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2) \xRightarrow{t=-x} e^{-x} = 1 - x + \frac{(-x)^2}{2} + o(x^2)$$

$$= 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\Rightarrow \cos(\sqrt{x}) - e^{-x} = \cancel{1} \cancel{-x} + \frac{x^2}{6} \cancel{-1} \cancel{+x} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$= \frac{1-3}{6}x^2 + o(x^2) = -\frac{1}{3}x^2 + o(x^2) \sim -\frac{1}{3}x^2$$

per $x \to 0$

$$\Rightarrow \ell = \lim_{x\to 0}\frac{-1/3\,\cancel{x^2}\,1}{\cancel{x^2}\,1} = -\frac{1}{3}$$

Esercizio 2

[5 punti]

Determinare gli intervalli di monotonia della funzione $f(x) := x \cdot e^{2x^2-3x+1}$

Risoluzione

Studio della derivata prima:

• $f'(x) = 1 \cdot e^{2x^2-3x+1} + x \cdot e^{2x^2-3x+1} \cdot (4x-3)$

$$= \underbrace{(4x^2-3x+1)}_{=:\,p(x)} \cdot \underbrace{e^{2x^2-3x+1}}_{>0\ \forall x \in \mathbb{R}}$$

• $(-3)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 < 0 \Rightarrow p$ non ha zeri e quindi non cambia segno

$\Rightarrow p(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f'(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ è strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 3

[4 punti]

Calcolare la derivata direzionale $D_v f(x_0, y_0)$ della funzione $f(x,y) := \dfrac{\sin(xy)}{y}$ per il versore $v = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ nel punto $(x_0, y_0) = (-1, \pi)$

Risoluzione

- f è C^1 e quindi differenziabile.
- Per il teorema del gradiente segue

$$D_v f(x_0,y_0) = \frac{4}{5} \cdot f_x(x_0,y_0) + \frac{3}{5} \cdot f_y(x_0,y_0)$$

- $f_x(x,y) = \dfrac{\cos(x\cdot y)}{y} \cdot y = \cos(x \cdot y) \Rightarrow f_x(x_0,y_0) = \cos(-\pi) = -1$

- $f_y(x,y) = \dfrac{y \cdot \cos(x\cdot y) \cdot x - 1 \cdot \sin(x \cdot y)}{y^2} \Rightarrow$

$$f_y(x_0,y_0) = \frac{\pi \cdot \underbrace{\cos(-\pi)}_{=-1} \cdot (-1) - \underbrace{\sin(-\pi)}_{=0}}{\pi^2} = \frac{\pi}{\pi^2} = \frac{1}{\pi}$$

$$\Rightarrow D_v f(x_0,y_0) = -\frac{4}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{\pi} = \underline{\underline{\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{3}{\pi} - 4 \right)}}$$

Esercizio 4

[4 punti]

Studiare la derivabilità parziale della funzione $f(x,y) := (2x-1) \cdot e^{|y|}$ rispetto a x e y in $(x_0, y_0) = (\frac{1}{2}, 0)$

Risoluzione

- $$f_x(x_0,y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\frac{1}{2}+h, 0) - f(\frac{1}{2}, 0)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{2 \cdot (\frac{1}{2}+h) - 1 \cdot e^0 - (2 \cdot \frac{1}{2} - 1) \cdot e^0}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{2h - 0}{h} = 2$$

- $$f_y(x_0,y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\frac{1}{2}, h) - f(\frac{1}{2}, 0)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(2 \cdot \frac{1}{2} - 1) \cdot e^{|h|} - (2 \cdot \frac{1}{2} - 1) \cdot e^0}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

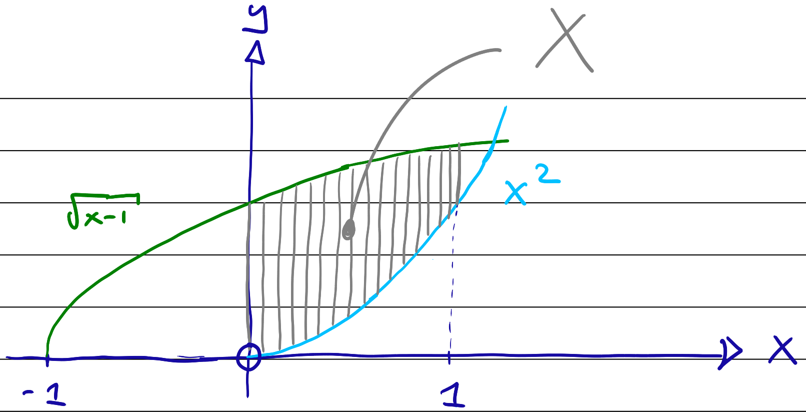
Quindi f è derivabile parzialmente in $(x_0,y_0) = (\frac{1}{2}, 0)$ con $\operatorname{grad} f(x_0,y_0) = (2, 0)$

Esercizio 5 **[6 punti]**

Disegnare il dominio $X := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1],\ x^2 \le y \le \sqrt{x+1}\ \right\}$ e calcolare l'integrale doppio

$$I := \iint_X 2y \, dx \, dy$$

Risoluzione



• La funzione integranda $f(x,y) = 2y$ è continua e X è y-semplice, quindi per Fubini-Tonelli vale

$$I = \int_{x=0}^{1} \int_{y=x^2}^{\sqrt{x+1}} 2y \, dy \, dx = \int_0^1 \left[y^2 \right]_{y=x^2}^{\sqrt{x+1}} dx$$

$$= \int_0^1 x+1 - x^4 \, dx = \left[\frac{x^2}{2} + x - \frac{x^5}{5} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{5} = \frac{5+10-2}{10} = \underline{\underline{\frac{13}{10}}}$$