Domanda 1 [4 punti]

6.7.21

(i) Dare la definizione di derivabilità nel punto $x = x_0$ per una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Studiare la deravabilità in $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = |x| \cdot \sqrt[3]{x}$.

Sol: i) f è derivabile in $x = x_0$ se converge il limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad \left(\text{oppure } \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$$

ii)

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h| \cdot \sqrt[3]{h} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{|h|}{h}}_{\text{limitato}} \cdot \underbrace{\sqrt[3]{h}}_{\to 0} = 0$$

$\Rightarrow$ f è derivabile in $x_0 = 0$ con derivata $f'(0) = 0$.

Domanda 2 [4 punti]

(i) Enunciare il teorema degli zeri.

(ii) Verificare che l'equazione $x^3 - 6x^2 + 13x = 7$ ammette almeno una soluzione $x \in \mathbb{R}$.

Sol: i) Se $f \in C[a,b]$ con $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora $\exists\, c \in (a,b)$ con $f(c) = 0$.

ii)
- $x^3 - 6x^2 + 13x = 7 \Leftrightarrow f(x) := x^3 - 6x^2 + 13x - 7 = 0$
- $f(0) = -7 < 0$, $f(1) = 1 - 6 + 13 - 7 = 1 > 0$
- $f \in C[0,1]$

$\Rightarrow$ $\exists\, c \in (0,1)$ con $f(c) = 0$, quindi c è una soluzione dell'equazione data.

Esercizio 1 [5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = e$$

Sol: Per $a_n := \dfrac{n^n}{n!}$ segue

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{\cancel{n+1}}}{\underbrace{(n+1)!}_{= \cancel{n!} \cdot \cancel{(n+1)}}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e \text{ per } n \to +\infty$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\sqrt[n]{a_n} \to e}$ per $n \to +\infty$

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare, se converge, l'integrale improprio

$$I := \int_0^e (x+1)\cdot \ln(x)\,dx \quad = \frac{e^2}{4}$$

Sol: • L'integrale è improprio perché $\ln(x) \to -\infty$ per $x \to 0^+$ e quindi

$$I = \lim_{a\to 0^+} \int_a^e (x+1)\cdot \ln(x)\,dx$$

• $$\int \underset{f'}{(x+1)} \cdot \underset{g}{\ln(x)} \overset{\text{i.p.p.}}{=} \underset{f}{\left(\frac{x^2}{2}+x\right)} \cdot \underset{g}{\ln(x)} - \int \overbrace{\underset{f}{\left(\frac{x^2}{2}+x\right)} \cdot \underset{g'}{\frac{1}{x}}}^{= \frac{x}{2}+1}\,dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\cdot \ln(x) - \left(\frac{x^2}{4}+x\right) + \text{costante}$$

$$\Rightarrow \int_a^e (x+1)\ln(x)\,dx = \left[\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\cdot \ln(x) - \frac{x^2}{4} - x\right]_a^e$$

$$= \left(\frac{e^2}{2}\cancel{+e}\right)\cdot \overbrace{\ln(e)}^{=1} - \frac{e^2}{4}\cancel{-e}$$

$$- \left(\frac{a^2}{2}+a\right)\cdot \ln(a) - \frac{a^2}{4} - a$$

usando $a\cdot\ln(a) \to 0$ per $a \to 0^+$ $\Rightarrow \frac{e^2}{4}$ per $a \to 0^+$

Quindi $\boxed{I = \frac{e^2}{4}}$.

Esercizio 3

[5 punti]

Determinare, se esistono, tutti gli asintoti della funzione $f(x) = \dfrac{2x^2+2x-4}{x+3}$.

Sol: • f è continua sul suo dominio $X = \mathbb{R}\setminus\{-3\}$

• $$\lim_{x\to -3^\pm} f(x) = \frac{2\cdot 3^2 - 2\cdot 3 - 4}{0^\pm} = \frac{8}{0^\pm} = \pm\infty$$

$\Rightarrow$ $\boxed{x = -3}$ è un asintoto verticale di f.

• $$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \text{possibilità di asintoti obliqui.}$$

• $$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+2x-4}{\underbrace{(x+3)\cdot x}_{= x^2+3x}} = 2 =: m$$

• $$\lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - m\cdot x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+2x-4}{x+3} - \overbrace{2x\cdot\frac{x+3}{x+3}}^{= \frac{2x^2+6x}{x+3}}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{2x^2}+2x-4\cancel{-2x^2}-6x}{x+3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-4x-4}{x+3} = -4 =: q$$

$\Rightarrow$ $y = 2x - 4$ è un asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$.

Esercizio 4 [4 punti]

Calcolare la derivata direzionale $D_v f(-1, \ln(\pi))$ di $f(x,y) = x \cdot \sin(x^3 \cdot e^y)$ nella direzione $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$.

Sol. • f è C^1 quindi differenziabile e per il teorema del gradiente segue

$$D_v f(-1, \ln(\pi)) = f_x(-1, \ln(\pi)) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - f_y(-1, \ln(\pi)) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

• $f_x(x,y) = 1 \cdot \sin(x^3 \cdot e^y) + x \cdot \cos(x^3 \cdot e^y) \cdot 3x^2 \cdot e^y$

$$\Rightarrow f_x(-1, \ln(\pi)) = \sin(\underbrace{(-1)^3}_{=-1} \cdot \underbrace{e^{\ln(\pi)}}_{=\pi}) - 1 \cdot \cos(-\pi) \cdot 3 \cdot (-1)^2 \cdot \pi$$

$$= \underbrace{\sin(-\pi)}_{=0} - \underbrace{\cos(-\pi)}_{=-1} \cdot 3\pi = 3\pi$$

• $f_y(x,y) = x \cdot \cos(x^3 \cdot e^y) \cdot x^3 \cdot e^y = x^4 \cdot \cos(x^3 \cdot e^y) \cdot e^y$

$$\Rightarrow f_y(-1, \ln(\pi)) = (-1)^4 \cdot \cos(-\pi) \cdot \pi = -\pi$$

Quindi risulta $D_v f(-1, \ln(\pi)) = \frac{3\pi}{\sqrt{2}} - \frac{-\pi}{\sqrt{2}} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}\pi}{\cancel{\sqrt{2}}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}}$

$$= 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \pi$$

Esercizio 5 [5 punti]

Studiare la continuità, derivabilità e differenziabilità in $(x_0, y_0) = (0,0)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3 - x^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Sol: • Ponendo $y = 0$ segue

$$\lim_{x \to 0} f(x,0) = \lim_{x \to 0} \overset{=-1}{\frac{-x^2}{x^2}} = -1 \neq 0 = f(0,0)$$

$\Rightarrow$ f non è continua in $(0,0)$

$\Rightarrow$ f non è differenziabile in $(0,0)$.

• $$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\overset{=-1}{\frac{-h^2}{h^2}} - 0}{h}$$

non converge

$\Rightarrow$ f non è derivabile rispetto ad x in $(0,0)$

- $f_y(0,0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{\frac{h^3}{h^2} - 0}{h} = 1$

$= 1$

$\Rightarrow$ f è derivabile rispetto ad y in $(0,0)$ con derivata $f_y(0,0) = 1$.