Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore **7.1.13**

Cognome.............................. **Nome**.................................... **A.A.**..........

Matricola.............................. **Corso di Laurea**...................... **Canale**

Domanda 1

[3 punti]

(i) Dare la definizione di convergenza per una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) Fare un esempio di una successione tale che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\frac{1}{2}$.

Risposta

(i) cfr. appunti

(ii) $a_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}$ converge a $\ell = -\frac{1}{2}$ per $n \to +\infty$

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

(ii) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $\underbrace{\int_0^x f(t)\,dt}_{=:\,F(x)} = x^2 - \sin(x)$. Allora $f(0)$ vale

$\boxed{a}$ 0 $\quad$ $\boxed{\cancel{b}}$ -1 $\quad$ $\boxed{c}$ 1 $\quad$ $\boxed{d}$ non si può calcolare $f(0)$

Risposta

i) cfr. appunti

ii) Per il teorema fondamentale F è derivabile con

$F'(x) = (x^2 - \sin(x))' = 2x - \cos(x) = f(x)$ quindi

segue $f(0) = 2\cdot 0 - \cos(0) = -1$

Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)\cdot\cos(2x)-x}{x\cdot\ln(1+x^2)} \;(*)\; = -13/6$$

Risoluzione

$\bullet\ \ln(1+t) \sim t$ per $t \to 0 \Rightarrow \ln(1+x^2) \sim x^2$ per $x \to 0$

$\Rightarrow x \cdot \ln(1+x^2) \sim x^3$ per $x \to 0$

$\Rightarrow$ Il numeratore è da sviluppare fino al 3° ordine:

$\bullet\ \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, $\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \Rightarrow$

$\cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2) = 1 - 2x^2 + o(x^2) \Rightarrow$

$$\sin(x)\cdot\cos(2x) - x = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(1 - 2x^2 + o(x^2)\right) - x$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} - 2x^3 + o(x^3)\right) - x$$

$$= -\frac{13}{6}x^3 + o(x^3) \sim -\frac{13}{6}x^3 + o(x^3) \text{ per } x \to 0$$

$$\Rightarrow (*) \sim \frac{-13/6 \cdot x^3}{x^3}$$

$= -13/6 =$ limite per $x \to 0$

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare l'integrale definito

$$I := \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{1+4x^2}}\,dx = \frac{1}{2}$$

Risoluzione

$$I = \frac{1}{4}\int_0^{\sqrt{2}} \underbrace{\frac{4\cdot x}{\sqrt{1+4x^2}}\,dx}_{=dt}$$

$$= \frac{1}{4}\int_1^3 dt = \frac{1}{4}\cdot t\Big|_1^3 =$$

$$= \frac{1}{4}(3-1) = \frac{1}{2}$$

Sost. $\sqrt{1+4x^2} = t \Rightarrow$

$\bullet\ \frac{dt}{dx} = \frac{8x}{2\cdot\sqrt{1+4x^2}} \Rightarrow$

$dt = \frac{4x}{\sqrt{1+4x^2}}\cdot dx$

$\bullet\ x = 0 \Rightarrow t = \sqrt{1+4\cdot 0^2} = 1$

$\bullet\ x = \sqrt{2} \Rightarrow t = \sqrt{1+4(\sqrt{2})^2} = 3$

Esercizio 3

[4 punti]

Calcolare l'equazione del piano tangente al grafico di $f(x,y) = x \cdot e^{\sin(y)}$ nel punto $\underbrace{(x_0, y_0)}_{=: P_0} = (2, \pi)$.

Risoluzione

$p(x,y) = f(P_0) + f_x(P_0)(x-x_0) + f_y(P_0)\cdot(y-y_0)$. Abbiamo

$\cdot\ f(P_0) = 2 \cdot e^{\sin(\pi)} = 2 \cdot e^0 = 2$

$\cdot\ f_x(x,y) = e^{\sin(y)} \Rightarrow f_x(P_0) = e^0 = 1$

$\cdot\ f_y(x,y) = x \cdot e^{\sin(y)} \cdot \cos(y) \Rightarrow f_y(P_0) = 2 \cdot e^0 \cdot \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} = -2$

$\Rightarrow p(x,y) = 2 + 1\cdot(x-2) - 2(y-\pi)$

$= x - 2y + 2\pi$

Esercizio 4

[4 punti]

Studiare la continuità, la derivabilità e la differenziabilità in $(x_0, y_0) = (0,0)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 2 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Risoluzione

• Poniamo $y = mx \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x \to 0} \frac{2x^2 - 3m^2x^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{2-3m^2}{1+m^2}$

Visto che il limite dipende da m, il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ non esiste. $\Rightarrow f$ non è continua $\Rightarrow f$ non è differenziabile in $(x_0,y_0) = (0,0)$.

• Derivate parziali:

$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{\frac{2h^2}{h^2} - 2}^{=0}}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$

$f_y(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-3h^2}{h^2} - 2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-5}{h}$ non converge

Quindi f è derivabile rispetto a x ma non rispetto a y in $(x_0, y_0) = (0,0)$.

Esercizio 5

[7 punti]

Trovare il dominio, eventuali simmetrie, zeri, punti di estremo locale (*senza* calcolare la derivata seconda) ed asintoti della funzione $f(x) = \arctan\left(\frac{x}{3} - x^3\right)$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

• Dominio: tutto $\mathbb{R}$

• simmetrie: $\arctan(x)$ e $\frac{x}{3} - x^3$ sono dispari $\Rightarrow$ f è dispari.

• zeri: $\arctan(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ quindi $f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\frac{x}{3} - x^3 = x \cdot \left(\frac{1}{3} - x^2\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ opp. $x = \pm\sqrt{1/3}$

• Studio f': $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{3} - 3x^2}{1 + \left(\frac{x}{3} - x^3\right)^2} \Rightarrow$ (denominatore >0)

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1/9} = \pm\frac{1}{3}$.

Inoltre f' cambia segno in $+1/3$ da "+" a "−" $\Rightarrow$ max. loc.

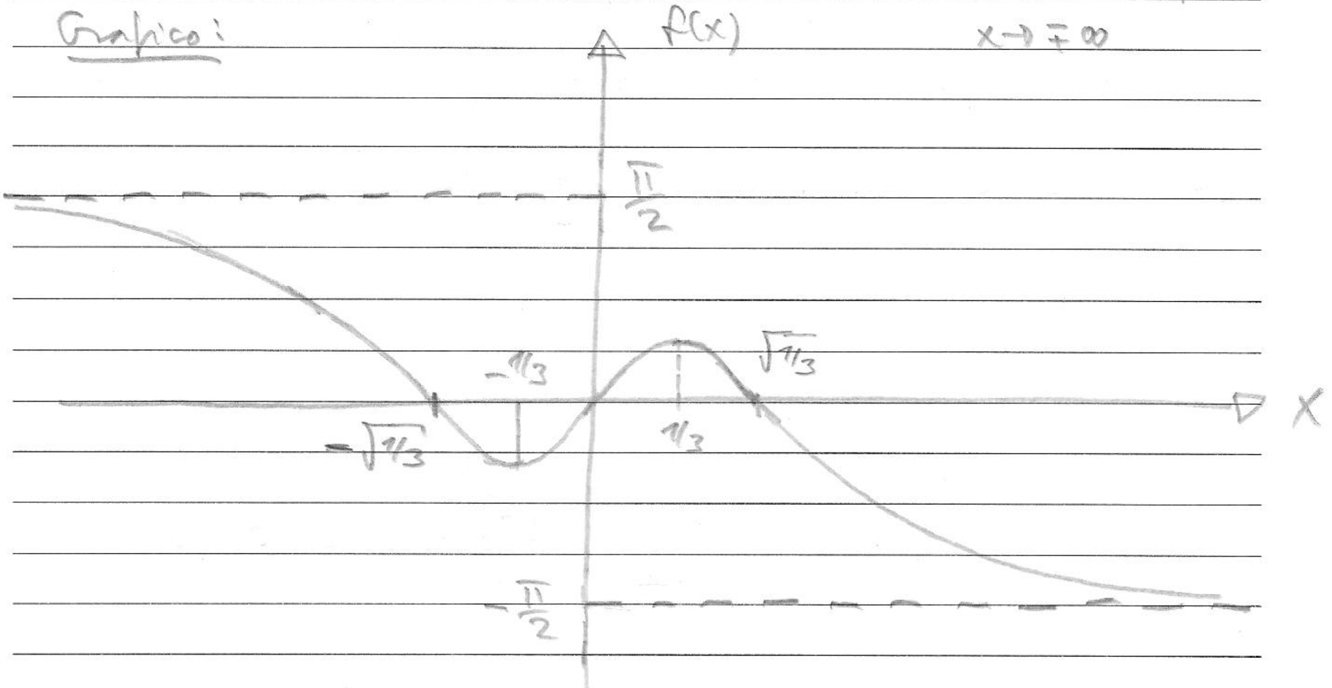
$-1/3$ da "−" a "+" $\Rightarrow$ min. loc.

• Asintoti: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \arctan\Big(\underbrace{\frac{x}{3} - x^3}_{\to -\infty}\Big) = -\pi/2$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\pi/2$

$\Rightarrow y = \pm\pi/2$ sono asintoti orizzontali per $x \to \mp\infty$

Grafico:



$f\left(\frac{1}{3}\right) = \arctan\left(\frac{1}{3 \cdot 3} - \left(\frac{1}{3}\right)^3\right) = \arctan\left(\frac{2}{27}\right) \simeq \frac{2}{27}$

$\arctan(x) \sim x$ per $x \to 0$