Analisi Matematica 1, Scritto 1-B. Durata della prova: 2 ore 7.1.13

Cognome .... **Nome** ....

Matricola .... **Corso di Laurea** ....

Domanda 1

[3 punti]

(i) Dare la definizione di convergenza per una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) Fare un esempio di una successione tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\frac{1}{3}$.

Risposta

(i) cfr. appunti

(ii) $a_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{n+1}$ converge a $\frac{1}{3}$ per $n \to +\infty$

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

(ii) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $\int_0^x f(t)\,dt = 1 + x - \cos(x)$. Allora $f(0)$ vale

[a] 0 [b] -1 ~~[c]~~ 1 [d] non si può calcolare $f(0)$

Risposta

i) cfr. appunti

ii) Ragionando come nel compito 1-A segue

$f(x) = \left(1 + x - \cos(x)\right)' = 1 + \sin(x) \Rightarrow$

$f(0) = 1 + \sin(0) = 1$

Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)\cdot\cos(\frac{x}{2}) - x}{x\cdot \ln^2(1+x)} = -\frac{7}{24}$$

Risoluzione

• $\ln(1+x) \sim x \Rightarrow \ln^2(1+x) \sim x^2 \Rightarrow x\cdot\ln^2(1+x) \sim x^3$ per $x\to 0$

$\Rightarrow$ il numeratore è da sviluppare fino al 3° ordine:

• $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, $\cos(\frac{x}{2}) = 1 - \frac{(\frac{x}{2})^2}{2} + o(x^2)$ per $x\to 0 \Rightarrow$

$$\sin(x)\cdot\cos(\tfrac{x}{2}) - x = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\cdot\left(1 - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right)$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{8} + o(x^3)\right) - x$$

$$= -\tfrac{7}{24}\cdot x^3 + o(x^3) \sim -\tfrac{7}{24}x^3 \text{ per } x\to 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(x)\cdot\cos(\frac{x}{2}) - x}{x\cdot\ln^2(1+x)} \sim \frac{-7/24\cdot x^3}{x^3} = -7/24 = \text{limite}$$

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare l'integrale definito

$$I = \int_0^{\sqrt{5}} \frac{x}{\sqrt{1+\frac{x^2}{4}}}\,dx = 2$$

Risoluzione

$$I = 4\cdot\int_0^{\sqrt{5}} \underbrace{\frac{1}{4}\frac{x}{\sqrt{1+\frac{x^2}{4}}}dx}_{=dt}$$

$$= 4\cdot\int_1^{3/2} dt = 4\cdot t\Big|_1^{3/2}$$

$$= 4\left(\frac{3}{2} - 1\right) = \underline{2}$$

Sost: $\sqrt{1+\frac{x^2}{4}} = t \Rightarrow$

• $\frac{dt}{dx} = \frac{\frac{2x}{4}}{2\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{4}}} \Rightarrow$

$dt = \frac{1}{4}\frac{x}{\sqrt{1+\frac{x^2}{4}}}\cdot dx$

• $x=0 \Rightarrow t = \sqrt{1+\frac{0^2}{4}} = 1$

• $x=\sqrt{5} \Rightarrow t = \sqrt{1+\frac{5}{4}} = \sqrt{9/4}$

$= \frac{3}{2}$

Esercizio 3

[4 punti]

Calcolare l'equazione del piano tangente al grafico di $f(x, y) = y \cdot e^{\cos(x)}$ nel punto $\underbrace{(x_0, y_0)}_{=: P_0} = (\frac{\pi}{2}, 1)$.

Risoluzione

Si procede come nel compito 1-A:

- $f(P_0) = 1 \cdot e^{\cos(\frac{\pi}{2})} = e^0 = 1$
- $f_x(x,y) = y \cdot e^{\cos(x)} \cdot (-\sin(x)) \Rightarrow f_x(P_0) = -\sin(\pi/2) = -1$
- $f_y(x,y) = e^{\cos(x)} \Rightarrow f_y(P_0) = 1$

$\Rightarrow p(x,y) = 1 - 1 \cdot (x - \pi/2) + 1 \cdot (y-1)$

$= -x + y + \pi/2$

Esercizio 4

[4 punti]

Studiare la continuità, la derivabilità e la differenziabilità in $(x_0, y_0) = (0, 0)$ della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2 - 2y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ -2 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Risoluzione

Si ragiona come nel compito 1-A:

- ponendo $y = mx$ segue $\lim_{x \to 0} f(x, mx) = \frac{3 - 2m^2}{1 + m^2}$

$\Rightarrow$ f non è continua $\Rightarrow$ f non è differenziabile

- $f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{3h^2}{h^2} - (-2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5}{h}$ non converge

$\Rightarrow$ f non è derivabile rispetto a x in $(0,0)$

- $f_y(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-2h^2}{h^2} - (-2)}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$

$\Rightarrow$ f è derivabile rispetto a y in $(0,0)$ con $f_y(0,0) = 0$.

Esercizio 5

[7 punti]

Trovare il dominio, eventuali simmetrie, zeri, punti di estremo locale (*senza* calcolare la derivata seconda) ed asintoti della funzione $f(x) = \arctan(x^3 - 3x)$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

Si procede come nel compito 1-A:

- Dominio: tutto $\mathbb{R}$
- Simmetrie: f è dispari
- Zeri: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x = x \cdot (x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ opp. $x = \pm\sqrt{3}$
- Studio f': $f'(x) = \dfrac{3(x^2-1)}{\underbrace{1+(x^3-3x)^2}_{>0}}$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Inoltre, f' cambia segno in

- $x = +1$ da "$-$" a "$+$" $\Rightarrow$ min. loc.
- $x = -1$ da "$+$" a "$-$" $\Rightarrow$ max. loc

Asintoti: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \arctan(\overbrace{x^3-3x}^{\to\pm\infty}) = \pm\pi/2$

$\Rightarrow y = \pm\pi/2$ sono asintoti orizzontali per $x \to \pm\infty$.

Grafico