Analisi Matematica 1, Scritto 2-A. Durata della prova: 2 ore **7.1.13**

Cognome .... **Nome** ....

Matricola .... **Corso di Laurea** ....

Domanda 1

[3 punti]

(i) Dare la definizione di funzione continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Fare un esempio (anche grafico) di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che è continua in $x = \pi$ e discontinua in $x = e$.

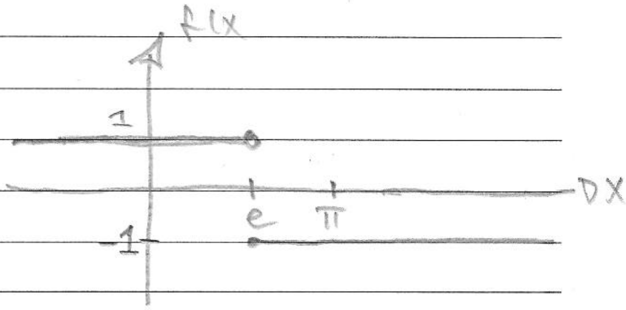
Risposta

(i) cfr. appunti

(ii) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < e \\ -1 & \text{se } x \geq e \end{cases}$

è continua in $x = \pi$

e discontinua in $x = e$



Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare la Formula di Taylor con resto di Peano.

(ii) Sia $T_4(x) = -\frac{1}{2}x^3 + x^2 - 1$ il polinomio di McLaurin di $f \in C^5(\mathbb{R})$. Allora $f'''(0)$ vale

☐ a 0 ☐ b $-\frac{1}{2}$ ☒ c -3 ☐ d non si può calcolare $f'''(0)$

Risposta

i) cfr. appunti

ii) T_4 e f hanno la derivata 3^a in $x_0 = 0$ in comune

cioè $T_4'''(0) = f'''(0)$. Inoltre vale $T_4'''(x) = -\frac{6}{2} = -3$

$\Rightarrow f'''(0) = -3$.

Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{x\cdot\sin(x)-\ln(1+x^2)}{x^4}}_{=:(*)} = \frac{1}{3}$$

Risoluzione

Dobbiamo sviluppare il numeratore fino al 4° ordine:

- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \Rightarrow x\cdot\sin(x) = x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^4)$ per $x\to 0$
- $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \Rightarrow \ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$ per $x\to 0$

$\Rightarrow x\cdot\sin(x) - \ln(1+x^2) = \cancel{x^2} - \frac{x^4}{6} - \cancel{x^2} + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$

$= \frac{x^4}{3} + o(x^4) \sim \frac{x^4}{3}$ per $x\to 0$

$\Rightarrow (*) \sim \dfrac{\frac{x^4}{3}}{x^4} = \frac{1}{3} =$ limite

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare l'integrale definito

$$I := \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \frac{x\cdot\sin(x^2)}{1+2\cos(x^2)}\,dx = \frac{\ln(3)}{4}$$

Risoluzione

$I = -\frac{1}{4}\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \frac{\overbrace{-4x\cdot\sin(x^2)\,dx}^{=dt}}{\underbrace{1+2\cos(x^2)}_{=t}}$

$= -\frac{1}{4}\int_3^1 \frac{1}{t}\,dt$

$= \frac{1}{4}\int_1^3 \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{4}\ln(t)\Big|_1^3$

$= \frac{1}{4}(\ln(3) - \underbrace{\ln(1)}_{=0})$

$= \frac{\ln(3)}{4}$

Sost: $1+2\cos(x^2) = t \Rightarrow$

- $\frac{dt}{dx} = -2\sin(x^2)\cdot 2x$

$dt = -4x\cdot\sin(x^2)\,dx$

- $x=0 \Rightarrow t = 1+2\cos(0) = 3$

$x = \sqrt{\pi/2} \Rightarrow t = 1+2\underbrace{\cos(\pi/2)}_{=0} = 1$

Esercizio 3

[4 punti]

Calcolare la derivata direzionale di $f(x,y) = x \cdot \ln(1+e^y)$ nel punto $\underbrace{(x_0,y_0)}_{=:P_0} = (-1, \ln(2))$ nella direzione $v = \frac{1}{5}(3,4)$.

Risoluzione

f è C^1 è quindi differenziabile e dal teorema del gradiente segue

$$D_v f(P_0) = \text{grad} f(P_0) \cdot v.$$

- $f_x(x,y) = \ln(1+e^y) \Rightarrow f_x(P_0) = \ln(1 + \underbrace{e^{\ln(2)}}_{=2}) = \ln(3)$
- $f_y(x,y) = x \cdot \frac{e^y}{1+e^y} \Rightarrow f_y(P_0) = -1 \frac{2}{1+2} = -\frac{2}{3}$

$$\Rightarrow D_v f(P_0) = (\ln(3), -2/3) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5}\ln(3) - \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}$$

$$= \frac{1}{5}\left(3\ln(3) - \frac{8}{3}\right)$$

(N.B. $D_v f(P_0)$ è un numero reale non un vettore!)

Esercizio 4

[4 punti]

Studiare la continuità in $(x_0, y_0) = (0,0)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2+3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Risoluzione

Per verificare la continuità passiamo alle coord. polari:

$$|f(x,y) - f(0,0)| \overset{\text{in coord. polari}}{=} \left| \frac{2 \cdot \varrho^2 \cdot \cos^2(\vartheta) + 3 \cdot \varrho^2 \sin^2(\vartheta)}{\varrho} - 0 \right|$$

$$= \varrho \cdot |2 \underbrace{\cos^2(\vartheta)}_{\leq 1} + 3 \underbrace{\sin^2(\vartheta)}_{\leq 1}|$$

$$\leq (2+3) \cdot \varrho = 5 \cdot \varrho = g(\varrho) \to 0 \text{ per } \varrho \to 0$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y) - f(0,0)| = 0 \Rightarrow$$

f è continua in $(x_0, y_0) = (0,0)$.

Esercizio 5 [7 punti]

Trovare dominio, zeri, punti di estremo locale e punti di flesso della funzione $f(x) = \ln(x^2) - \ln^2(x)$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

Dominio: $\mathrm{dom}(\ln) = (0, +\infty) = \mathrm{dom}(f)$.

Zeri: $f(x) = 2\ln(x) - \ln^2(x) = \ln(x)(2 - \ln(x))$

$\Rightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 0$ opp. $\ln(x) = 2$

$\Leftrightarrow x = 1$ opp. $x = e^2$

Studio f': $f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{2\ln(x)}{x} = 2 \cdot \frac{1 - \ln(x)}{\underbrace{x}_{>0}} = 0$

$\Leftrightarrow \ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e$

Inoltre f' cambia segno in $x = e$ da "+" a "−" $\Rightarrow$ max. locale

Studio f'': $f''(x) = 2 \cdot \frac{x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) - 1 \cdot (1 - \ln(x))}{x^2} = 2 \cdot \frac{\ln(x) - 2}{x^2}$

$= 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 2 \Leftrightarrow x = e^2$

Inoltre f'' cambia segno in $x = e^2 \Rightarrow x = e^2$ è un pto. di flesso.

Limiti alla frontiera del dominio:

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \underbrace{\ln(x)}_{\to -\infty} \cdot \underbrace{(2 - \ln(x))}_{\to +\infty} = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\ln(x)}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{(2 - \ln(x))}_{\to -\infty} = -\infty$

Grafico: