Cognome .... Nome ....

Matricola .... Corso di Laurea ....

Domanda 1

[3 punti]

(i) Dare la definizione di funzione continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

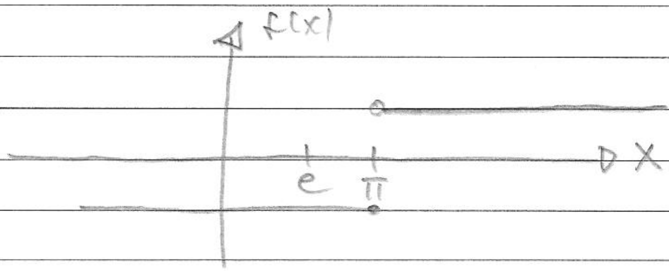
(ii) Fare un esempio (anche grafico) di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che è continua in $x = e$ e discontinua in $x = \pi$.

Risposta

(i) Cfr. appunti.

(ii)

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \leq \pi \\ +1 & \text{se } x > \pi \end{cases}$$



è continua in $x = e$
e discontinua in $x = \pi$

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare la Formula di Taylor con resto di Lagrange.

(ii) Sia $T_4(x) = 3x^3 - x^2 + 1$ il polinomio di McLaurin di $f \in C^5(\mathbb{R})$. Allora $f'''(0)$ vale

$\boxed{a}$ 0 $\cancel{\boxed{b}}$ 18 $\boxed{c}$ 3 $\boxed{d}$ non si può calcolare $f'''(0)$

Risposta

$T_4(x) = \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k = 3x^3 - x^2 + 1$. Quindi segue

$$\frac{f'''(0)}{3!} = 3 \Leftrightarrow f'''(0) = 3 \cdot \overset{3!}{\overset{\parallel}{6}} = 18$$

Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x^2) + x\cdot\sin(x)}{x^4} =: (*) = -2/3$$

Risoluzione

Si procede come nel compito 2-A:

- $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \Rightarrow \ln(1-x^2) = -x^2 - \frac{(-x^2)^2}{2} + o(x^4)$

$$= -x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) \text{ per } x\to 0$$

- $x\cdot\sin(x) = x\cdot\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^4)$ per $x\to 0$

$\Rightarrow \ln(1-x^2) + x\cdot\sin(x) = \cancel{-x^2} - \frac{x^4}{2} \cancel{+x^2} - \frac{x^4}{6} + o(x^4)$

$$= -\frac{2}{3}x^4 + o(x^4) \sim -\frac{2}{3}x^4 \text{ per } x\to 0$$

$\Rightarrow (*) \sim \frac{-\frac{2}{3}x^4}{x^4} = -2/3 = \text{limite}$

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare l'integrale definito

$$I := \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \frac{x\cdot\cos(x^2)}{2+\sin(x^2)}\,dx$$

Risoluzione

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \frac{\overbrace{2x\cdot\cos(x^2)\,dx}^{=dt}}{\underbrace{2+\sin(x^2)}_{=t}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{1}{t}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln(3) - \ln(2)\right)$$

$$= \frac{\ln(3/2)}{2}$$

Sost: $2+\sin(x^2) = t \Rightarrow$

- $\frac{dt}{dx} = \cos(x^2)\cdot 2x \Rightarrow$

  $dt = 2x\cdot\cos(x^2)\,dx$

- $x = 0 \Rightarrow t = 2 + \sin(0^2) = 2$

- $x = \sqrt{\pi/2} \Rightarrow t = 2 + \sin(\frac{\pi}{2}) = 3$

Esercizio 3

[4 punti]

Calcolare la derivata direzionale di $f(x, y) = \ln(1+e^x) \cdot y$ nel punto $\underbrace{(x_0, y_0)}_{\shortparallel\, P_0} = (\ln(3), 1)$ nella direzione $v = \frac{1}{5}(4, -3)$.

Risoluzione

Si procede come nel compito 2-A:

$$f_x(x,y) = \frac{e^x}{1+e^x} \cdot y \Rightarrow f_x(P_0) = \frac{\overbrace{e^{\ln(3)}}^{=3}}{1+e^{\ln(3)}} \cdot 1 = \frac{3}{1+3} = \frac{3}{4}$$

$$f_y(x,y) = \ln(1+e^x) \Rightarrow f_y(P_0) = \ln(1+3) = \ln(4)$$

$$\Rightarrow D_v f(P_0) = \left(\frac{3}{4}, \ln(4)\right) \cdot \left(\frac{4}{5}, \frac{-3}{5}\right) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\ln(4)$$

$$= \frac{3}{5}\left(1 - \ln(4)\right)$$

Esercizio 4

[4 punti]

Studiare la continuità in $(x_0, y_0) = (0, 0)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2-2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Risoluzione

Si procede come nel compito 2-A usando le coord. polari:

$$|f(x,y) - f(0,0)| \overset{\text{in coord. polari}}{=} \left| \frac{3 \cdot \rho^2 \cdot \cos^2(\vartheta) - 2 \cdot \rho^2 \cdot \sin^2(\vartheta)}{\rho} - 0 \right|$$

$$= \rho \cdot \left| 3\overbrace{\cos^2(\vartheta)}^{\leq 1} - 2\overbrace{\sin^2(\vartheta)}^{\leq 1} \right|$$

$$\leq \rho \cdot (3+2) = 5 \cdot \rho =: g(\rho) \to 0 \text{ per } \rho \to 0$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y) - f(0,0)| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) \Rightarrow f \text{ è continua in } (x_0,y_0) = (0,0).$$

Esercizio 5

[7 punti]

Trovare dominio, zeri, punti di estremo locale e punti di flesso della funzione $f(x) = \ln(x^2) + \ln^2(x)$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

Si procede come nel compito 2-A:

• Dominio: $(0, +\infty)$

• Zeri: $f(x) = 2 \cdot \ln(x) + \ln^2(x) = \ln(x) \cdot (2 + \ln(x)) \Rightarrow$
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ opp. $x = e^{-2}$

• Studio f': $f'(x) = \frac{2}{x} + \frac{2\ln(x)}{x} = 2\,\frac{1 + \ln(x)}{x} = 0$, $x > 0$
$\Leftrightarrow x = e^{-1}$

Inoltre f' cambia segno in $x = e^{-1}$ da "$-$" a "$+$" $\Rightarrow$ min. loc.
$f(e^{-1}) = 2 \cdot \underbrace{\ln(e^{-1})}_{=-1} + \ln^2(e^{-1}) = -2 + 1 = -1$

• Studio f'': $f''(x) = 2 \cdot \frac{x \cdot \frac{1}{x} - 1 \cdot (1 + \ln(x))}{x^2} = \frac{-2 \cdot \ln(x)}{x^2}$

$= 0 \Leftrightarrow x = 1$

Inoltre $f''(x)$ cambia segno in $x = 1 \Rightarrow x = 1$ è un pto di flesso.

Limiti alla frontiera del dominio:

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \underbrace{\ln(x)}_{\to -\infty} \cdot \underbrace{(2 + \ln(x))}_{\to -\infty} = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty + (+\infty) = +\infty$

Grafico: