Analisi Matematica (1), Scritto 1-A. **Durata della prova: 2 ore** **7.2.18**

Firma: ....

Cognome .... **Nome** .... **A.A.** ....

Matricola .... **Corso di Laurea** ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Dare la definizione di continuità di f in $x_0 \in (a, b)$.

(ii) Fare l'esempio di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che è continua ma *non* derivabile in $x_0 = \pi$.

Risposta

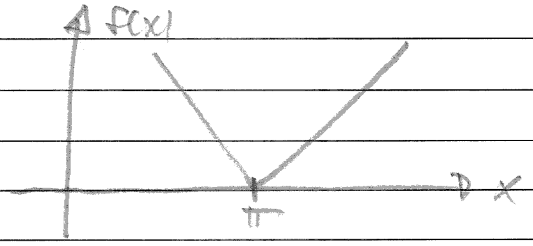
(i) f è continua in $x_0 \in (a,b)$ se $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$

t.c. $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in (a,b)$ con $|x - x_0| < \delta$

(oppure: se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$)

(ii) P.e. $f(x) = |x - \pi|$ è continua ma non derivabile

in $x = \pi$



Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema di Lagrange (chiamato anche teorema del valor medio).

(ii) Trovare un punto c del teorema di Lagrange per $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}$.

Risposta

(i) cfr. Compito B

(ii)
• f è derivabile in $[0,1]$ • $f(b) = f(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$

• $f(a) = f(0) = e^0 = 1 \Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\frac{1}{e} - 1}{1 - 0} = \frac{1}{e} - 1 = \frac{1 - e}{e}$

• $f'(x) = -e^{-x}$. Quindi si cerca $c \in [0,1]$ t.c.

$-\frac{1}{e^c} = -e^{-c} = \frac{1 - e}{e} \Rightarrow e^c = \frac{e}{e-1} \Rightarrow \boxed{c = \ln\left(\frac{e}{e-1}\right)}$

Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{\cancel{x\to+\infty}} \frac{\frac{\sin(2x)}{x}-2}{x^2} =: \ell$$

Risoluzione

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(2x)}{x}-2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)-2x}{x^3} \quad \left(= \frac{0-0}{0^3} = \frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot\cos(2x)-2}{3x^2} \quad \left(= \frac{2-2}{3\cdot 0^2} = \frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-2\cdot\cancel{2}\cdot\sin(2x)}{3\cdot\cancel{2}x} \quad \left(= \frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} -\frac{2}{3}\cdot\frac{2\cdot\overset{\to 1}{\cos(2x)}}{1} = \frac{-2\cdot 2}{3} = \boxed{-\frac{4}{3}} = \ell$$

Esercizio 2

[4 punti]

Studiare la convergenza del seguente integrale improprio. Nel caso converga, calcolarne il valore.

$$\int_3^4 \frac{dx}{\sqrt{x-3}} =: I$$

Risoluzione

$$I = \lim_{c\to 3^+} \int_c^4 (x-3)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \lim_{c\to 3^+} \left[\frac{(x-3)^{\overbrace{-\frac{1}{2}+1}^{=\frac{1}{2}}}}{\underbrace{-\frac{1}{2}+1}_{=\frac{1}{2}}}\right]_c^4$$

$$= \lim_{c\to 3^+} 2\cdot\left(\sqrt{4-3}-\sqrt{c-3}\right) = 2\cdot(1-0) = \underline{\underline{2}}$$

Esercizio 3

$= \ln(x) - \ln(y)$ **[4 punti]**

Calcolare l'equazione del piano tangente della funzione $f(x,y) := \ln\left(\frac{x}{y}\right)$ nel punto $(2,1)$.

Risoluzione

- $p(x,y) = f(2,1) + f_x(2,1)\cdot(x-2) + f_y(2,1)\cdot(y-1)$
- $f(2,1) = \ln\left(\frac{2}{1}\right) = \ln(2)$
- $f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(\ln(x) - \ln(y)) = \frac{1}{x} \Rightarrow f_x(2,1) = \frac{1}{2}$
- $f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(\ln(x) - \ln(y)) = -\frac{1}{y} \Rightarrow f_y(2,1) = -1$

Quindi $\boxed{p(x,y) = \ln(2) + \frac{1}{2}(x-2) - 1\cdot(y-1)}$

Esercizio 4

[5 punti]

Studiare la continuità, la derivabilità e la differenziabilità in $(0,0)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)\cdot\cos(y^2)}{x^2+y^2} + 3y & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Risoluzione

- Poniamo $y = mx$

Allora $\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x^2)\cdot\cos(m^2x^2)}{x^2+m^2x^2} + 3mx \right)$ $\to 1$ $\to 0$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{(1+m^2)\cdot x^2} \to 1 = \frac{1}{1+m^2}$

dipende da $m \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ non esiste $\Rightarrow$

- f non è continua in $(0,0)$ $\Rightarrow$ • f non è differenziabile in $(0,0)$

Derivabilità:

$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sin(h^2)}{h^2} - 0}{h}$ $\to 1$, $h \to 0$ non converge

$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3h - 0}{h} = 3$

$\Rightarrow f$ non è derivabile in $(0,0)$

Esercizio 5

[6 punti]

Trovare il dominio, zeri, eventuali asintoti e punti di estremo locale della funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{1-x}$$

e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

• dominio: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, • zeri: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

• asintoti: $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$, $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$\Rightarrow \boxed{x = 1}$ è un asintoto verticale dif per $x \to 1^\pm$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} x \cdot \underbrace{\frac{1}{\frac{1}{x} - 1}}_{\to -1} = \pm\infty \cdot (-1) = \mp\infty$

Inoltre • $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{x^2}{1-x}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{1-x} = -1 =: m$

• $\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2}{1-x} + x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + (1-x) \cdot x}{1-x}$

$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\cancel{x^2} + x - \cancel{x^2}}{1-x} = -1 =: q$

$\Rightarrow \boxed{y = mx + q = -x - 1}$ è un asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$

• $f'(x) = \frac{(1-x) \cdot 2x - (-1) \cdot x^2}{(1-x)^2} = \frac{2x - 2x^2 + x^2}{(1-x)^2} = \frac{x \cdot (2-x)}{(1-x)^2}$ $(1-x)^2 > 0$ sempre

$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oppure $x = 2$. Inoltre

• $f'(x)$ cambia in $x=0$ segno da "$-$" a "$+$" $\Rightarrow x=0$ è un pto. di min loc.

• $f'(x)$ cambia in $x=2$ segno da "$+$" a "$-$" $\Rightarrow x=2$ è un pto. di max loc.

$f(0) = 0$, $f(2) = \frac{2^2}{1-2} = -4$

Grafico:

minimo loc: (0,0)

massimo loc. (2,-4)