Analisi Matematica (1), Scritto 1-B. **Durata della prova: 2 ore** **7.2.18**

Firma: ....

Cognome .... **Nome** .... **A.A.** ....

Matricola .... **Corso di Laurea** ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Dare la definizione di continuità di f in $x_0 \in (a, b)$.

(ii) Fare l'esempio di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che è continua ma *non* derivabile in $x_0 = e$.

Risposta

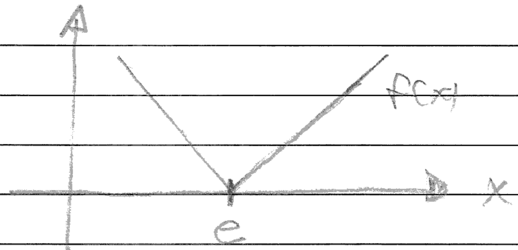
(i) f è continua in $x_0 \in (a,b)$ se

$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (a,b)$ con $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$ segue

$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$

(ii) P.e. $f(x) := |x-e|$ è continua ma non derivabile

in $x_0 = e$:



Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema di Lagrange (chiamato anche teorema del valor medio).

(ii) Trovare un punto c del teorema di Lagrange per $f : [-1, 0] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$.

Risposta

(i) Sia $f \in C[a,b]$ derivabile in (a,b). Allora $\exists\, c \in (a,b)$

t.c. $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

(ii) • f è derivabile in $[-1,0]$, • $f(b) = f(0) = e^0 = 1$,

• $f(a) = f(-1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$. $\Rightarrow \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{1-\frac{1}{e}}{0-(-1)} = \dfrac{e-1}{e}$

• $f'(x) = e^x$. Quindi si cerca $c \in [-1,0]$ t.c.

$e^c = \frac{e-1}{e} \Leftrightarrow \boxed{c = \ln\left(\frac{e-1}{e}\right)}$

Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\ell := \lim_{x\to 0} \frac{3 - \frac{\sin(3x)}{x}}{x^2}$$

$\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)$

Risoluzione

$$\frac{3 - \frac{\sin(3x)}{x}}{x^2} = \frac{3x - \sin(3x)}{x^3} = \frac{3x - \left(3x - \frac{(3x)^3}{6} + o((3x)^3)\right)}{x^3}$$

$$= \frac{\frac{\cancel{27}^{\,9} x^3}{\cancel{6}_{\,2}} + o(x^3)}{x^3} = \frac{9}{2} + \frac{o(x^3)}{x^3} \to \boxed{\frac{9}{2}} \text{ per } x \to 0$$

$$\frac{9}{2} = \ell$$

Esercizio 2

[4 punti]

Studiare la convergenza del seguente integrale improprio. Nel caso converga, calcolarne il valore.

$$\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} =: I$$

Risoluzione

$$I = \lim_{c\to 2^+} \int_c^6 (x-2)^{-1/2}\,dx = \lim_{c\to 2^+} \left[\frac{(x-2)^{-1/2+1}}{-1/2+1}\right]_c^6$$

$$= \frac{1}{1/2}\cdot\left(\sqrt{6-2} - \lim_{c\to 2^+}\sqrt{c-2}\right) = 2\cdot(\sqrt{4} - 0) = \underline{\underline{4}}$$

Esercizio 3

$= \ln(y) - \ln(x)$

[4 punti]

Calcolare l'equazione del piano tangente della funzione $f(x,y) := \ln(\frac{y}{x})$ nel punto $(2,1)$.

Risoluzione

- $p(x,y) = f(2,1) + f_x(2,1)\cdot(x-2) + f_y(2,1)\cdot(y-1)$
- $f(2,1) = \ln(\frac{1}{2}) = -\ln(2)$
- $f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(\ln(y)-\ln(x)) = -\frac{1}{x} \Rightarrow f_x(2,1) = -\frac{1}{2}$
- $f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(\ln(y)-\ln(x)) = \frac{1}{y} \Rightarrow f_y(2,1) = 1$

Quindi $\boxed{p(x,y) = -\ln(2) - \frac{1}{2}\cdot(x-2) + 1\cdot(y-1)}$

Esercizio 4

[5 punti]

Studiare la continuità, la derivabilità e la differenziabilità in $(0,0)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\cos(x^2)\cdot\sin(y^2)}{x^2+y^2} + 2x & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Risoluzione

- Poniamo $y = mx$.

Allora $\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\overset{\to 1}{\cos(x^2)}\cdot\sin(m^2x^2)}{x^2+m^2x^2} + \overset{\to 0}{2x}\right)$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(m^2 x^2)\cdot m^2}{(1+m^2)\,x^2\cdot m^2} = \frac{m^2}{1+m^2}$ ($\frac{\sin(m^2x^2)}{x^2 \cdot m^2} \to 1$)

dipende da $m \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ non esiste $\Rightarrow$

- f non è continua in $(0,0)$ $\Rightarrow$ • f non è differenziabile in $(0,0)$
- Derivabilità:

$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h-0}{h} = 2$

$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overset{\to 1}{\frac{\sin(h^2)}{h^2}} - 0}{\underset{\to 0}{h}}$ non converge

$\Rightarrow$ f non è derivabile in $(0,0)$

Esercizio 5

[6 punti]

Trovare il dominio, zeri, eventuali asintoti e punti di estremo locale della funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

• dominio: $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

• zeri: $f(x) = 0 \iff x^2 = 0 \iff x = 0$; $f(0) = 0$.

• asintoti: $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$, $\lim_{x \to -1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\Rightarrow \boxed{x = -1}$ è un asintoto verticale di f per $x \to -1^\pm$.

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} x \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \pm\infty \cdot 1 = \pm\infty$

Inoltre $\cdot \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x+1}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x+1} = 1 =: m$

$\cdot \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - x(1+x)}{x+1}$

$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\cancel{x^2} - x - \cancel{x^2}}{x+1} = -1 =: q$.

$\Rightarrow \boxed{y = mx + q = x - 1}$ è un asintoto obliquo di f per $x \to \pm\infty$.

• $f'(x) = \frac{(x+1) \cdot 2x - 1 \cdot x^2}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = \frac{x \cdot (x+2)}{(x+1)^2}$ >0 sempre

$\Rightarrow f'(x) = 0 \iff x = 0$ oppure $x = -2$. Inoltre

$\cdot f'(x)$ cambia in $x = 0$ segno da "−" a "+" $\Rightarrow x = 0$ è un pto. di min loc.

$\cdot f'(x)$ cambia in $x = -2$ segno da "+" a "−" $\Rightarrow x = -2$ è un pto. di max loc.

$f(0) = 0$, $f(-2) = \frac{(-2)^2}{-2+1} = -4$.

Grafico:

minimo loc: $(0, 0)$

massimo loc: $(-2, -4)$