**Analisi Matematica 1. Durata della prova: 2 ore** **7.2.23**

Firma: ....................

**Cognome** .................................... **Nome** ....................................

**Matricola** .................................... **Corso di Laurea:** Ingegneria dell'Informazione

| | |
|---|---|
| D1 | |
| D2 | |
| E1 | |
| E2 | |
| E3 | |
| E4 | |
| E5 | |
| $\Sigma$ | |

## Domanda 1

**[4 punti]**

(i) Dare la definizione di convergenza di una serie numerica $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

(ii) Dare l'esempio di una serie numerica con somma $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1$

**Risposta**

(i) La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge alla somma $s \in \mathbb{R}$ se

$\lim_{n \to +\infty} s_n = s$ dove $s_n := a_0 + a_1 + \dots + a_n$ per $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Per esempio la serie di Mengoli $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)} = 1$

( Oppure: Se $a_n := \begin{cases} 1 & \text{per } n = 1 \\ 0 & \text{per } n > 1 \end{cases}$

allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1 + 0 + 0 + 0 + \dots = 1$. )

## Domanda 2

**[5 punti]**

(i) Enunciare la Formula di Taylor con il resto di Peano.

(ii) Calcolare il polinomio di Maclaurin di ordine 3 di $f(x) := 3 + x \cdot \big(2 + \ln(1 + x)\big)$.

**Risposta**

(i) Se $f \in C^n(a,b)$ e $x, x_0 \in (a,b)$ allora $f(x)$ si può rappresentare come

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k + o((x-x_0)^k) \text{ per } x \to x_0$$

(ii) • $f(x) = 3 + 2x + x \cdot \ln(1+x)$

$= 3 + 2x + x \cdot \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$

$= 3 + 2x + x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$ per $x \to 0$

$\Rightarrow \underline{\underline{T_3(x) = -\frac{x^3}{2} + x^2 + 2x + 3}}$

## Esercizio 1 **[4 punti]**

Determinare, se esistono, gli asintoti obliqui della funzione $f(x) := \dfrac{3x^2+4x+1}{x+3}$.

### Risoluzione

- $m = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{3x^2+4x+1}{x\cdot(x+3)} = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{\cancel{x^2}\cdot(3+4\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{\cancel{x^2}\cdot(1+\frac{3}{x})}$

$= \frac{3}{1} = 3$

- $q = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - m\cdot x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left( \dfrac{3x^2+4x+1}{x+3} - 3\cdot x \cdot \dfrac{x+3}{x+3} \right)$

$= \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{\cancel{3x^2}+4x+1 \cancel{-3x^2} - 9x}{x+3} = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{-5x+1}{x+3} = -5$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{y = 3\cdot x - 5}}$ è asintoto obliquo di $f$ per $x\to\pm\infty$

## Esercizio 2 **[5 punti]**

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+\sin(x)-x\cdot e^x}{x\cdot(1-\cos(x))} =: \ell$$

### Risoluzione

- $1-\cos(x) \sim \frac{x^2}{2} \overset{\text{P.d.S.}}{\Longrightarrow} x\cdot(1-\cos(x)) \sim x\cdot\frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{2}$ per $x\to 0$

$\Rightarrow$ numeratore da sviluppare fino al 3° ordine

- $x^2 + \sin(x) - x\cdot e^x = x^2 + x - \frac{x^3}{6} - x\cdot\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) + o(x^3)$

$= \cancel{x^2} \cancel{+x} - \frac{x^3}{6} \cancel{-x} \cancel{-x^2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$

$= \left(-\frac{1}{6} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 3}\right)\cdot x^3 + o(x^3)$

$= -\frac{4}{6}\cdot x^3 + o(x^3) \sim -\frac{2}{3}\cdot x^3$ per $x\to 0$

P.d.S. $\Rightarrow$

$\ell = \lim_{x\to 0} \dfrac{-\frac{2}{3}\cdot\cancel{x^3}}{\frac{1}{2}\cdot\cancel{x^3}} = \underline{\underline{-\frac{4}{3}}}$

## Esercizio 3

**[4 punti]**

Determinare gli estremi locali della funzione $f(x) := e^{2x^3+3x^2-12x-3}$ e classificarli.

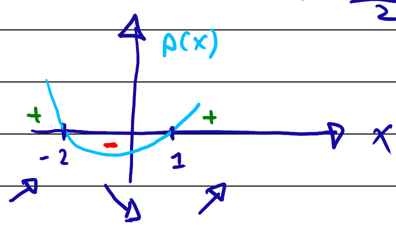
### Risoluzione

- $f \in C^1(\mathbb{R}) \Rightarrow$ gli unici candidati per punti di estremo locale sono i punti critici di $f(x)$

- $f'(x) = \underbrace{e^{2x^3+3x^2-12x-3}}_{>0\ \forall x \in \mathbb{R}} \cdot (6x^2+6x-12) \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow$

$p(x) := 6\cdot(x^2+x-2) = 0 \Leftrightarrow x = x_{1/2} = \dfrac{-1 \pm \overbrace{\sqrt{1+4\cdot 1\cdot 2}}^{=3}}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 \\ \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$

- Segno di $f'(x)$ = segno di $p(x)$ e




$p(x)$ cambia segno in

$x = -2$ da "+" a "−" $\Rightarrow x = -2$ è un punto di massimo locale

$x = 1$ da "−" a "+" $\Rightarrow x = 1$ è un punto di minimo locale

## Esercizio 4

**[4 punti]**

Calcolare il piano tangente al grafico della funzione $f(x,y) = \dfrac{x \cdot y}{1+y}$ nel punto $(x_0, y_0) = (-1, 1)$.

### Risoluzione

- $p(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$.

- $f(x_0,y_0) = \dfrac{-1\cdot 1}{1+1} = -\dfrac{1}{2}$

- $f_x(x,y) = \dfrac{y}{1+y} \Rightarrow f_x(-1,1) = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

- $f_y(x,y) = \dfrac{(1+y)\cdot x - 1\cdot x \cdot y}{(1+y)^2} \Rightarrow f_y(-1,1) = \dfrac{(1+1)\cdot(-1) - (-1)\cdot 1}{(1+1)^2}$

$= \dfrac{-2+1}{4} = -\dfrac{1}{4}$

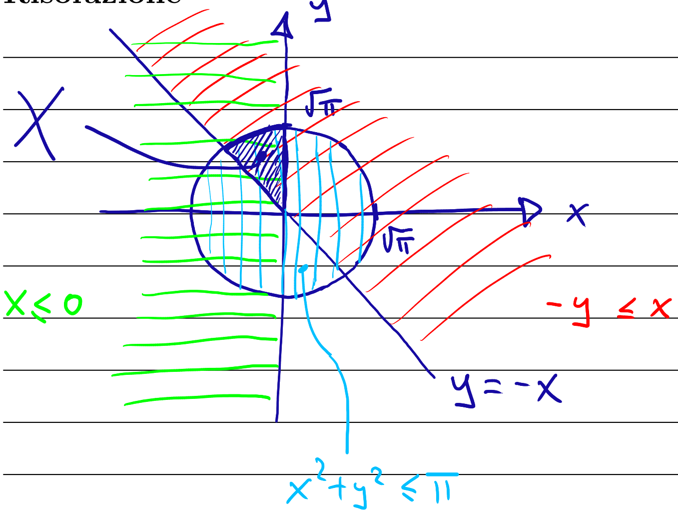
$\Rightarrow p(x,y) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cdot(x+1) - \dfrac{1}{4}(y-1)$

## Esercizio 5 **[6 punti]**

Disegnare l'insieme $X := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le \pi,\ -y \le x \le 0\}$ e calcolare l'integrale doppio

$$I := \iint_X \sin(x^2+y^2)\, dx\, dy$$

**Risoluzione**




- $X$ corrisponde a $X' = \{(\rho, \vartheta) \mid \rho \in [0, \sqrt{\pi}], \vartheta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi]\}$
  $= [0, \sqrt{\pi}] \times [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi]$ in coordinate polari.
- Passando alle coordinate polari si ottiene

$$I = \int_0^{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} \sin(\rho^2) \cdot \rho \cdot d\vartheta\, d\rho = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{\pi}} \underbrace{2\rho \cdot \sin(\rho^2)}_{=(-\cos(\rho^2))'} d\rho \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^{3/4\,\pi} 1\, d\vartheta$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \Big[\cos(\rho^2)\Big]_0^{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) \cdot \pi$$

$$= -\frac{1}{2}\Big(\underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} - \underbrace{\cos(0)}_{=1}\Big) \cdot \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2} \cdot (-1-1) \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\pi}{4}$$