Analisi Matematica (1) $\boxed{\text{9 CFU}}$ Durata della prova: 2 ore 7.7.14

Firma: ....

Cognome .... Nome .... A.A. ....

Matricola .... Corso di Laurea ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$.

(ii) Dare un esempio di funzione $f(x)$ tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -5$.

Risposta

(i) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists M \in \mathbb{R}$ t.c.

$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x > M$

oppure:

$\forall (x_n) \subset X =$ dominio di f con $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ segue $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l$.

(ii)

p.e. $f(x) = -5 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Domanda 2

[4 punti]

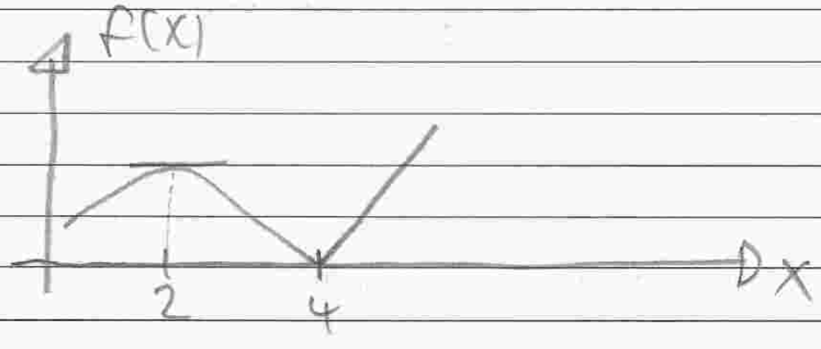
(i) Dare la definizione di derivata prima in x_0 per $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Disegnare il grafico di una funzione con derivata nulla in $x = 2$ che non è derivabile in $x = 4$.

Risposta

(i) $f'(x_0) = \lim_{h\to0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \left(= \lim_{h\to0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right)$

(ii)



Esercizio 1 [5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 - x\sin(x^2)}{2x^7} =$$

Risoluzione

$h := x^2 \to 0$ per $x \to 0$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin(x^2)}{2x^6} \overset{\downarrow}{=} \lim_{h\to 0} \frac{h - \sin(h)}{2h^3} \left(= \frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1-\cos(h)}{2\cdot 3\, h^2} \quad \frac{1-\cos(h)}{h^2} \to \frac{1}{2} \quad = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{12}$$

Esercizio 2 [4 punti]

Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{\pi/4} \underset{f\cdot g'}{3x\sin(2x)}dx. =: I$$

Risoluzione i.p.p.

$$I = \underset{f\cdot g}{3x\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)}\Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \underset{f'\cdot g}{3\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)}\,dx$$

$$= \underbrace{-\frac{3\pi}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\overbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{=0} - 0}_{=0} + \frac{3}{2}\int_0^{\pi/4}\cos(2x)\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\,\frac{\sin(2x)}{2}\Big|_0^{\pi/4} = \frac{3}{4}\cdot\overbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{=1} - 0 = \frac{3}{4}$$

Esercizio 3

[5 punti]

Trovare il piano tangente in $\overset{(x_0, y_0)}{(2, 3)}$ alla funzione $f(x, y) = 10 + xy + \sqrt{3 + x^2 + y^2}$.

Risoluzione

$$p(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0).$$

$$f(x_0,y_0) = 10 + 2\cdot 3 + \sqrt{3+2^2+3^2} = 16 + \sqrt{16} = 20$$

$$f_x(x,y) = y + \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{3+x^2+y^2}} \Rightarrow f_x(x_0,y_0) = 3 + \frac{2}{4} = \frac{7}{2}$$

$$f_y(x,y) = x + \frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{3+x^2+y^2}} \Rightarrow f_y(x_0,y_0) = 2 + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$$

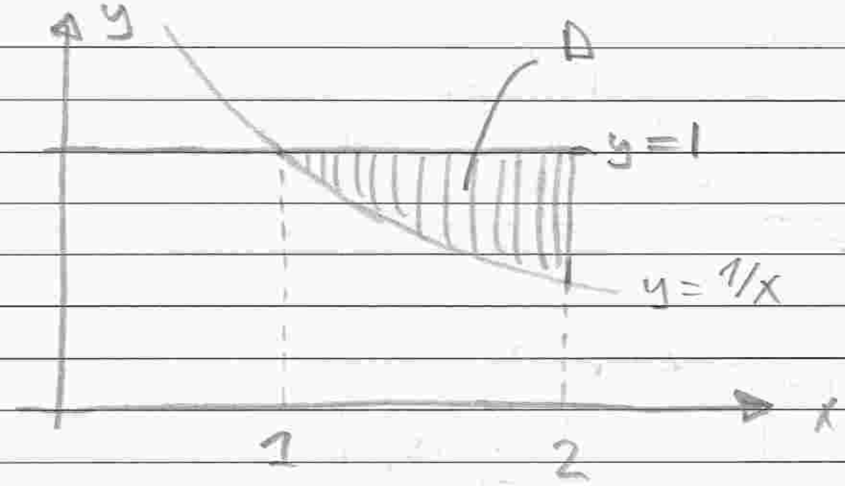
$$\Rightarrow \boxed{p(x,y) = 20 + \frac{7}{2}(x-2) + \frac{11}{4}(y-3)}$$

Esercizio 4

[5 punti]

Disegnare l'insieme $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 2, \quad \frac{1}{x} \le y \le 1\right\}$. Calcolare l'integrale $\iint\limits_D 2x^2 y\,dx\,dy$. $=: I$

Risoluzione



D è y-semplice, quindi per Fubini-Tonelli vale

$$I = \int_1^2 \int_{1/x}^1 2x^2\cdot y\,dy\,dx = \int_1^2 \left(\cancel{2}x^2\cdot \frac{y^2}{\cancel{2}}\Big|_{y=1/x}^{1}\right) dx = \int_1^2 x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$= \int_1^2 (x^2-1)\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 - x\Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} - 1 = \frac{4}{3}$$

Esercizio 5

[5 punti]

Studiare la continuità, la derivabilità e la differenziabilità in $(x_0, y_0) = (0,0)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^4 \sin(x^4)}{x^8+y^8} + 6x & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Risoluzione

Poniamo $y = m \cdot x$ $\Rightarrow$

$$\lim_{x \to 0} f(x, mx) = \lim_{x \to 0} \frac{m^4 x^4 \cdot \sin(x^4)}{x^8 + m^8 x^8} + \underbrace{6x}_{\to 0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{m^4}{1+m^8} \cdot \underbrace{\frac{\sin(x^4)}{x^4}}_{\to 1} + 0$$

$$= \frac{m^4}{1+m^8}$$

$\Rightarrow \lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$ non esiste

$\Rightarrow$ f non è continua in $(0,0)$

$\Rightarrow$ f non è differenziabile in $(0,0)$.

Derivabilità: se $x = 0 \overset{(\sin(0)=0)}{\Rightarrow} f(x,y) = f(0,y) = 0$

$$\Rightarrow f_y(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{0}{h}}_{=0} = 0$$

se $y = 0 \Rightarrow f(x,y) = f(x,0) = 6x$

$$\Rightarrow f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{6h - 0}{h} = 6$$

Quindi f è derivabile in $(0,0)$ con

$\text{grad} f(0,0) = (6, 0)$.