Istituzioni di Matematiche 1° Modulo $\boxed{6\,\mathrm{CFU}}$ Durata della prova: 90 min. 7.7.14

Firma:..............................

Cognome............................Nome................................A.A.........

Matricola............................ Corso di Laurea.......................

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
Σ	

Domanda 1

[5 punti]

(i) Dare la definizione di $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$.

(ii) Dare un esempio di funzione $f(x)$ tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -5$.

Risposta

(i)

cfr. Compito 9 CFU

(ii)

Domanda 2

[5 punti]

(i) Dare la definizione di derivata prima in x_0 per $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Disegnare il grafico di una funzione con derivata nulla in $x = 2$ che non è derivabile in $x = 4$.

Risposta

(i)

cfr. Compito 9 CFU

(ii)

Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - x\sin(x^2)}{2x^7}$$

Risoluzione

cfr. Compito 9 CFU

Esercizio 2

[4 punti]

Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{\pi/4} 3x\sin(2x)dx.$$

Risoluzione

cfr. Compito 9 CFU

Esercizio 3

[5 punti]

Trovare l'equazione della retta tangente in $x_0 = 2$ della funzione $f(x) = \ln(1 + x^2)$.

Risoluzione

$t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

$f(x_0) = \ln(1 + 2^2) = \ln 5$

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x \Rightarrow f'(x_0) = \frac{2 \cdot 2}{1+2^2} = 4/5$

$\Rightarrow t(x) = \ln(5) + 4/5\,(x - 2)$

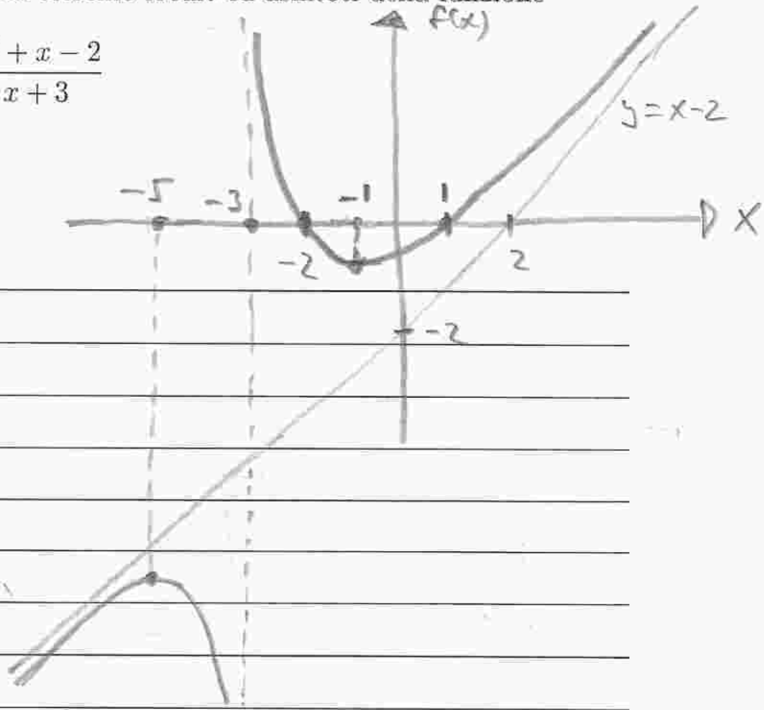
Esercizio 4

[5 punti]

Trovare il dominio, eventuali simmetrie, zeri, punti di estremo locale ed asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x + 3}$$

e tracciarne un grafico approssimativo.



Risoluzione

dominio: $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$

Simmetrie: No

zeri: $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2+x-2=0$

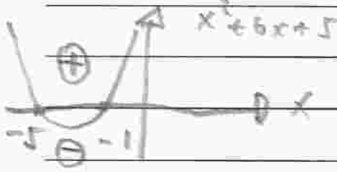
$\Leftrightarrow x = x_{1/2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$

derivata: $f'(x) =$

$$\frac{(x+3)(2x+1)-1(x^2+x-2)}{(x+3)^2} = \frac{2x^2+7x+3-x^2-x+2}{(x+3)^2} = \frac{x^2+6x+5}{(x+3)^2}$$

pti. stazionari: $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2+6x+5=0$

$\Leftrightarrow x = x_{3/4} = \dfrac{-6 \pm \overbrace{\sqrt{36-4\cdot 5}}^{=4}}{2} = \begin{cases} -1 \\ -5 \end{cases}$



$\Rightarrow$ in $x = \begin{Bmatrix} -1 \\ -5 \end{Bmatrix}$ $f'(x)$ cambia segno da $\begin{Bmatrix} \text{"}-\text{" a "}+\text{"} \\ \text{"}+\text{" a "}-\text{"} \end{Bmatrix}$

$\Rightarrow x = \begin{Bmatrix} -1 \\ -5 \end{Bmatrix}$ è un pto di $\begin{Bmatrix} \text{minimo} \\ \text{massimo} \end{Bmatrix}$ locale

Asintoti: $\lim\limits_{x \to -3^{+/-}} = \dfrac{(-3)^2-3-2}{0^{+/-}} = \dfrac{4}{0^{+/-}} = \pm\infty \Rightarrow x=-3$ è un asintoto verticale

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty \Rightarrow$ possibilità di asintoti obliqui:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2+x-2}{x^2+3x} = 1 =: m$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2+x-2}{x+3} - x \cdot \frac{x+3}{x+3} \right) =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{\cancel{x^2}+x-2-\cancel{x^2}-3x}{x+3} \right) = -2 = q$$

$\Rightarrow y = x-2$ è un asintoto obliquo