Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore 8.1.15

Firma: ..........................

Cognome ............................ Nome ................................. A.A. .........

Matricola ................................. Corso di Laurea ...............................

| | |
|---|---|
| D1 | |
| D2 | |
| E1 | |
| E2 | |
| E3 | |
| E4 | |
| E5 | |
| $\Sigma$ | |

## Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

(ii) Dare un esempio di una successione $a_n$ tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = -2$.

**Risposta**

(i) $\forall M > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $a_n > M\ \forall n \geq n_0$

(ii) $a_n = -2 + \frac{1}{n}$

## Domanda 2

[4 punti]

(i) Dare la definizione di derivata prima in $x_0$ per $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Disegnare il grafico di una funzione con derivata prima uguale a 0 in $x = 2$ e con derivata prima uguale a 1 in $x = 5$.

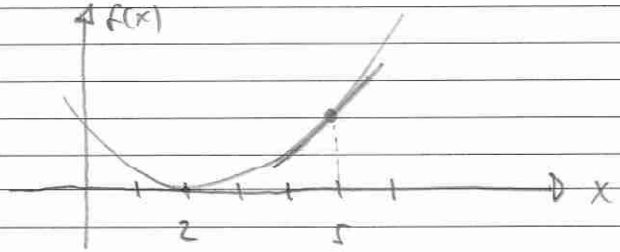
**Risposta**

(i) f si dice derivabile in $x \in \mathbb{R}$ se converge il limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =: f'(x)$$

e in questo caso $f'(x)$ si chiama derivata prima di f in x.

(ii)



## Esercizio 1

[5 punti]

Studiare il carattere della serie

$$S := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+13)!+31}{(n+14)!+25}$$

### Risoluzione

- $(n+13)!+31 \sim (n+13)!$
- $(n+14)!+25 \sim (n+14)!$

$\Rightarrow$ (per il princ. di sost.):

$$\frac{(n+13)!+31}{(n+14)!+25} \sim \frac{(n+13)!}{\underbrace{(n+14)!}_{=(n+13)!\cdot(n+14)}} = \frac{1}{n+14} \overset{\text{poiché } n+14 \sim n}{\sim} \frac{1}{n} \quad \text{per } n \to +\infty$$

Quindi per il criterio del confronto asintotico la serie $S$ e la serie armonica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ hanno lo stesso comportamento.

Visto che la serie armonica diverge, anche la serie $S$ diverge.

## Esercizio 2

[4 punti]

Studiare la convergenza o la divergenza del seguente integrale improprio. Nel caso converga, calcolarne il valore.

$$I := \int_{-\infty}^{-6} \frac{1}{(x+5)^{14}}\, dx.$$

### Risoluzione

$$I = \lim_{c \to -\infty} \int_c^{-6} (x+5)^{-14}\, dx = \lim_{c \to -\infty} \left[ \frac{(x+5)^{-13}}{-13} \right]_c^{-6}$$

$$= \lim_{c \to -\infty} \left( \frac{(-6+5)^{-13}}{-13} - \underbrace{\frac{(c+5)^{-13}}{-13}}_{\to 0 \text{ per } c \to -\infty} \right) = \frac{1}{13}$$

## Esercizio 3

[5 punti]

Trovare il piano tangente in $(1, 2)$ alla funzione $f(x, y) = 2 + xy^2 + \sin(\pi x + 2\pi y)$.

### Risoluzione

- $f(1,2) = 2+1\cdot 2^2+\sin(1\cdot\pi+2\pi\cdot 2) = 6+\overbrace{\sin(5\pi)}^{=0} = 6$
- $f_x(x,y) = y^2+\cos(\pi x+2\pi y)\cdot\pi \Rightarrow f_x(1,2) = 2^2+\overbrace{\cos(5\pi)}^{=\cos(\pi)=-1}\cdot\pi = 4-\pi$
- $f_y(x,y) = 2x\cdot y+\cos(\pi x+2\pi y)\cdot 2\pi \Rightarrow f_y(1,2) = 2\cdot 1\cdot 2+\cos(5\pi)\cdot 2\pi$
  $= 4-2\pi$

$$\Rightarrow p(x,y) = f(1,2)+f_x(1,2)(x-1)+f_y(1,2)(y-2)$$

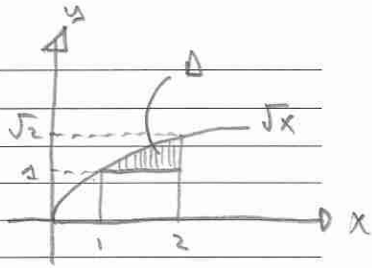
$$= 6+(4-\pi)(x-1)+(4-2\pi)(y-2)$$

## Esercizio 4

[5 punti]

Disegnare l'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, \quad 1 \leq y \leq \sqrt{x}\}$. Calcolare l'integrale $I = \iint_D 12xy \, dxdy$.

### Risoluzione




Per Fubini-Tonelli

$$I = \int_1^2 \int_1^{\sqrt{x}} 12xy \, dy \, dx$$

$$= 12\int_1^2 \left[x\cdot\frac{y^2}{2}\right]_{y=1}^{\sqrt{x}} dx$$

$$= 6\cdot\int_1^2 x\cdot(x-1)\,dx = 6\cdot\int_1^2 x^2-x\,dx$$

$$= 6\cdot\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = 6\cdot\left(\frac{2^3}{3}-\frac{1}{3}-\frac{2^2}{2}+\frac{1}{2}\right)$$

$$= 6\cdot\left(\frac{16-2-12+3}{6}\right) = 5$$

## Esercizio 5 [5 punti]

Studiare la continuità, la derivabilità e la differenziabilità in $(x_0, y_0) = (0,0)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{7y^2(e^{x^4}-1)}{x^6+y^6} + 2x & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

**Risoluzione**

• Studio di $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$: Poniamo $y = m \cdot x$. Allora

ottenìamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{7m^2 \cdot x^2 (e^{x^4}-1)}{x^6 + m^6 x^6} + \underbrace{2x}_{\to 0 \text{ per } x \to 0} = \lim_{x\to 0} \frac{7m^2}{1+m^6} \cdot \underbrace{\frac{e^{x^4}-1}{x^4}}_{\to 1 \text{ per } x\to 0}$$

$= \frac{7m^2}{1+m^6}$. Visto che il limite dipende da $m$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

non esiste $\Rightarrow$ $f$ non è continua in $(0,0)$ $\Rightarrow$ $f$ non è differenziabile in $(0,0)$.

• derivabilità:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{0+2h-0}{h}}_{= 2} = 2$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{0-0}{h}}_{= 0} = 0$$

Quindi $f$ è derivabile parzialmente in $(0,0)$ con gradiente

$\operatorname{grad} f(0,0) = (2,0)$.