Analisi Matematica 1, Scritto 1-B. Durata della prova: 2 ore 8.1.15

Firma: ....

Cognome .... Nome .... A.A. ....

Matricola .... Corso di Laurea ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

(ii) Dare un esempio di una successione a_n tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 5$.

Risposta

(i) $\forall M<0 \ \exists n_0\in\mathbb{N}$ t.c. $a_n<M \ \forall n\geq n_0$

(ii) $a_n = 5+\frac{1}{n}$

Domanda 2

[4 punti]

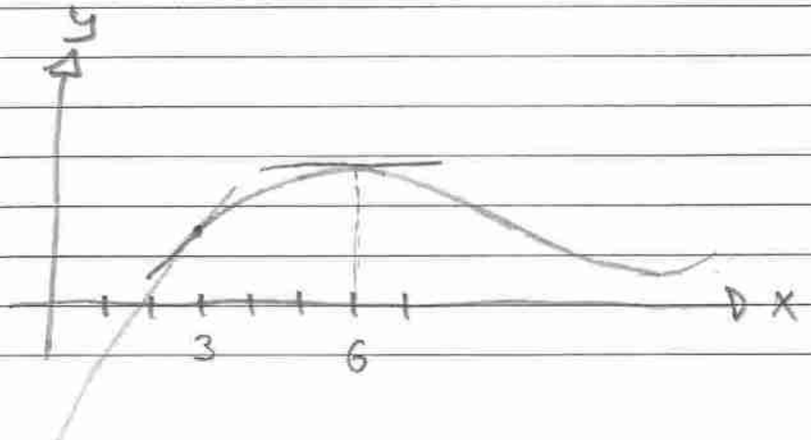
(i) Dare la definizione di derivata prima in x_0 per $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

(ii) Disegnare il grafico di una funzione con derivata prima uguale a 1 in $x=3$ e con derivata prima uguale a 0 in $x=6$.

Risposta

(i) cfr. Compito (A)

(ii)



Esercizio 1

[5 punti]

Studiare il carattere della serie

$$S := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+17)! + 35}{(n+18)! + 21}$$

Risoluzione

Si procede come nel compito (A):

$$\left.\begin{array}{l}(n+17)! + 35 \sim (n+17)! \\ (n+18)! + 21 \sim (n+18)!\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{(n+17)!+35}{(n+18)!+21} \sim \frac{(n+17)!}{\underbrace{(n+18)!}_{=(n+17)!\cdot(n+18)}} = \frac{1}{n+18} \sim \frac{1}{n}$$

per $n \to +\infty$

Visto che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge anche S diverge per il criterio del confronto asintotico.

Esercizio 2

[4 punti]

Studiare la convergenza o la divergenza del seguente integrale improprio. Nel caso converga, calcolarne il valore.

$$I = \int_{-\infty}^{-8} \frac{1}{(x+7)^{16}}\, dx.$$

Risoluzione

$$I = \lim_{c \to -\infty} \int_{-c}^{-8} (x+7)^{-16}\, dx = \lim_{c \to -\infty} \left[\frac{(x+7)^{-15}}{-15} \right]_{-c}^{-8}$$

$$= \lim_{c \to -\infty} \left(\frac{(-8+7)^{-15}}{-15} - \underbrace{\frac{(c+7)^{-15}}{-15}}_{\to 0} \right) = \frac{1}{15}$$

Esercizio 3

[5 punti]

Trovare il piano tangente in $(2,1)$ alla funzione $f(x,y) = 5 + x^2y + \sin(2\pi x + \pi y)$.

Risoluzione

$$\bullet\; f(2,1) = 5 + 2^2\cdot 1 + \sin(2\pi\cdot 2 + \pi\cdot 1) = 9 + \overbrace{\sin(5\pi)}^{=0} = 9$$

$$\bullet\; f_x(x,y) = 2xy + \cos(2\pi x + \pi y)\cdot 2\pi \Rightarrow f_x(2,1) = 2\cdot 2 + \overbrace{\cos(5\pi)}^{=\cos(\pi) = -1}\cdot 2\pi = 4 - 2\pi$$

$$\bullet\; f_y(x,y) = x^2 + \cos(2\pi x + \pi y)\cdot \pi \Rightarrow f_y(2,1) = 2^2 + \cos(5\pi)\cdot\pi = 4 - \pi$$

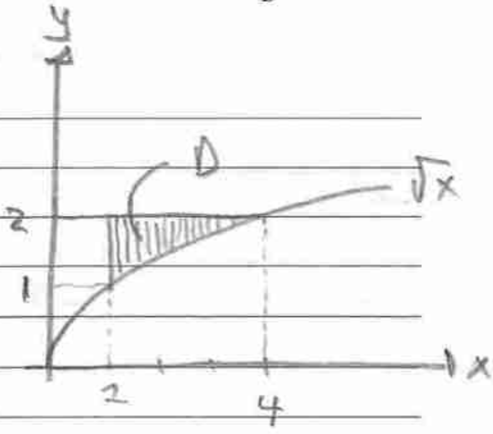
$$\Rightarrow p(x,y) = f(2,1) + f_x(2,1)(x-2) + f_y(2,1)\cdot(y-1) = \underline{\underline{9 + (4-2\pi)(x-2) + (4-\pi)(y-1)}}$$

Esercizio 4

[5 punti]

Disegnare l'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 4, \quad \sqrt{x} \le y \le 2\}$. Calcolare l'integrale $I = \iint_D \frac{2}{3}xy\, dxdy$.

Risoluzione



Per Fubini-Tonelli

$$I = \int_1^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{2}{3} xy\, dy\, dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_1^4 \left[x\cdot\frac{y^2}{2}\right]_{y=\sqrt{x}}^2 dx =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\int_1^4 x\cdot(4-x)\, dx = \frac{1}{3}\cdot\int_1^4 4x - x^2\, dx = \frac{1}{3}\left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_1^4$$

$$= \frac{1}{3}\left(2\cdot 16 - \frac{64}{3} - 2 + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(30 - \overbrace{\left(\frac{63}{3}\right)}^{=21}\right) = \frac{1}{3}\cdot 9$$

$$= \underline{\underline{3}}$$

Esercizio 5

[5 punti]

Studiare la continuità, la derivabilità e la differenziabilità in $(x_0, y_0) = (0,0)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{4y^2 \ln(1+x^2)}{x^4+y^4} + 5y & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Risoluzione

Si procede come nel compito (A):

• $y = mx \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x \to 0} \frac{4m^2 x^2 \cdot \ln(1+x^2)}{x^4 + m^4 \cdot x^4} + \overbrace{5mx}^{\to 0 \text{ per } x\to 0}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{4m^2}{1+m^4} \cdot \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = \frac{4m^2}{1+m^4}$ ($\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \to 1$ per $x \to 0$)

$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ non esiste $\Rightarrow$ f non è continua in $(0,0)$

$\Rightarrow$ f non è differenziabile in $(0,0)$.

• derivate parziali:

$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$

$f_y(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{5h-0}{h} = 5$

$\Rightarrow$ f è derivabile parzialmente in $(0,0)$ con gradiente

$\nabla f(0,0) = (0,5)$.