Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore 8.2.16

Firma: ....

Cognome .... Nome .... A.A. ....

Matricola .... Corso di Laurea ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in $x = c$.

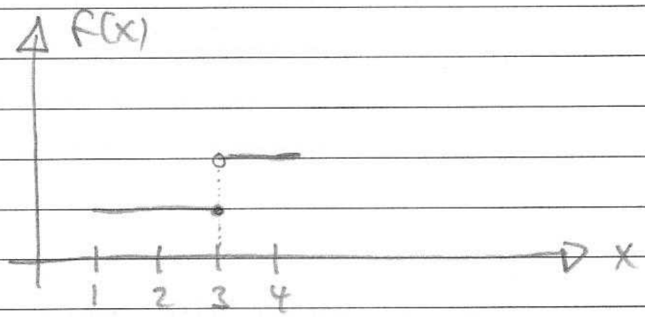
(ii) Disegnare il grafico di una funzione $f : [1, 4] \to \mathbb{R}$ continua in $x = 2$ e non continua in $x = 3$.

Risposta

(i)

$\Rightarrow$ appunti

(ii)



Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema di Lagrange (chiamato anche teorema del valor medio).

(ii) Trovare un punto c del teorema di Lagrange per $f(x) = x^2 + x + 8$ in $[1, 3]$.

Risposta

(i)

$\Rightarrow$ appunti

(ii) • $f(a) = f(1) = 10$, $f(b) = f(3) = 20 \Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{20-10}{3-1} = 5$

• $f'(x) = 2x+1 \Rightarrow f'(c) = 2c+1 \overset{!}{=} 5$

$\Rightarrow c = \frac{5-1}{2} = 2$

Esercizio 1

[5 punti]

Studiare il carattere della serie

$$S := \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{n+21}{3n+4}\right)^n}_{=:a_n}$$

Risoluzione

Applichiamo il criterio della radice: $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ e

$\sqrt[n]{a_n} = \frac{n+21}{3n+4} \sim \frac{n}{3n} = \frac{1}{3}$ per $n \to +\infty$ cioè

$\sqrt[n]{a_n} \to 1/3 =: q < 1$ per $n \to +\infty$ $\Rightarrow$

La serie S converge.

Esercizio 2

[4 punti]

Studiare la convergenza o la divergenza del seguente integrale improprio. Nel caso converga, calcolarne il valore.

$$I := \int_0^2 \frac{1}{x^4} dx.$$

Risoluzione

$$I = \lim_{a \to 0^+} \int_a^2 \underbrace{\frac{1}{x^4}}_{=x^{-4}} dx = \lim_{a \to 0^+} \left[\frac{x^{-3}}{-3}\right]_a^2$$

$$= -\frac{1}{3} \lim_{a \to 0^+} \left[2^{-3} - a^{-3}\right] = -(-\infty) = +\infty$$

$$a^{-3} = \frac{1}{a^3} \to \frac{1}{(0^+)^3} = +\infty$$

Quindi l'integrale diverge a $+\infty$

Esercizio 3

[5 punti]

Trovare il piano tangente in $(2,1)$ alla funzione $f(x,y) = 1 + x^2y^3$.

Risoluzione

- $P(x,y) = f(2,1) + f_x(2,1)\cdot(x-2) + f_y(2,1)\cdot(y-1)$
- $f(2,1) = 1 + 2^2 \cdot 1^3 = \underline{\underline{5}}$
- $f_x(x,y) = 2xy^3 \Rightarrow f_x(2,1) = 2\cdot 2 \cdot 1^3 = \underline{\underline{4}}$
- $f_y(x,y) = 3x^2\cdot y^2 \Rightarrow f_y(2,1) = 3\cdot 2^2 \cdot 1^2 = \underline{\underline{12}}$

Quindi

$$P(x,y) = 5 + 4\cdot(x-2) + 12(y-1)$$

Esercizio 4

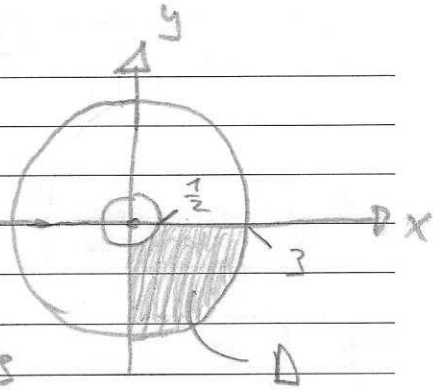
[5 punti]

Disegnare l'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad \frac{1}{4} < x^2+y^2 < 9, \quad 0 < x, \quad y < 0\}$. Calcolare l'integrale

$$I := \iint_D \frac{2x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy.$$

$= \rho$ in coord. polari

Risoluzione

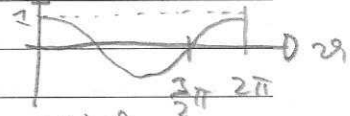


Passaggio alle coordinate polari:

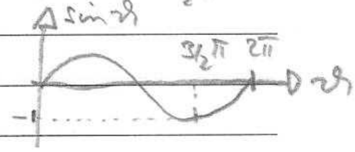
D corrisponde a $D' = \left\{ (\rho, \vartheta) \,\middle|\, \begin{array}{l} \rho \in (1/2, 3) \\ \vartheta \in (\frac{3}{2}\pi, 2\pi) \end{array} \right\}$

in coord. polari. Quindi risulta

$$I = \int_{1/2}^{3} \int_{3/2\pi}^{2\pi} \frac{2\rho\cdot\cos\vartheta + \rho\cdot\sin\vartheta}{\rho}\cdot \rho\, d\vartheta\, d\rho$$



$$= \int_{1/2}^{3} \rho\, d\rho \cdot \int_{3/2\pi}^{2\pi} 2\cdot\cos\vartheta + \sin\vartheta\, d\vartheta =$$



$$= \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_{1/2}^{3} \cdot \left[2\cdot\sin\vartheta - \cos\vartheta\right]_{3/2\pi}^{2\pi}$$

$$= \frac{9 - 1/4}{2} \cdot \underbrace{\left[2\cdot 0 - 1 - (2\cdot(-1) - 0)\right]}_{=1} = \frac{36-1}{8} = \underline{\underline{\frac{35}{8}}}$$

Esercizio 5

[5 punti]

Studiare la continuità, la derivabilità e la differenziabilità in $(x_0, y_0) = (0,0)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(e^x-1)^2 y^2}{x^4+y^4} + 5x & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Risoluzione

Continuità: Poniamo $y = mx \Rightarrow$

$$\lim_{x \to 0} f(x, mx) = \lim_{x \to 0} \frac{(e^x-1)^2 \cdot m^2 \cancel{x^2}}{\cancel{x^4}\,x^2 + m^4 \cdot \cancel{x^4}\,x^2} + 5x \to 0$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^2 \cdot m^2}{1+m^4} = \frac{m^2}{1+m^4}$$

$\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^2 \to 1^2 = 1$

dipende da $m \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ non esiste $\Rightarrow$

- f non è continua in $(0,0) \Rightarrow$
- f non è differenziabile in $(0,0)$

derivabilità:

$$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 + 5 \cdot h - 0}{h} = 5$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 + 5 \cdot 0 - 0}{0} = 0$$

$\Rightarrow f$ è derivabile in $(0,0)$ con

$\text{grad} f(0,0) = (5, 0)$